Ferienkurs Lineare Algebra 1

TUM – WS 2012/13

Übungsblatt 3 – Lineare Abbildungen und Matrizen

Robert Lang (rl@ph.tum.de) Mittwoch, 20. März 2013

Aufgabe 1
Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) Homothetie eines K-Vektorraums V: $f : V \to V$, $x \mapsto f(x) = \alpha x$ für ein $\alpha \in K$

(b) Projektion auf die i-te Vektorkomponente: $f_i : K^n \to K$, $x \mapsto f_i(x) = x_i$

(c) Translation: $f_a : V \to V$, $x \mapsto x + a$ für ein $a \in V$

(d) Für $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi \in V$ sei $F_\varphi : V \to V$, $f(x) \mapsto (F_\varphi(f))(x) = \varphi(x)f(x)$

(e) Für $V = K^X$, $W = K^Y$ und $\varphi \in X^Y$ sei $F_\varphi : V \to W$, $f \mapsto F_\varphi(f) = f \circ \varphi$

(f) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, 0, x_1)$

Aufgabe 2

(a) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 3.1 aus der Vorlesung indem Sie die Eindeutigkeit der linearen Fortsetzung zeigen.

(b) Zeigen Sie dass die drei Vektoren $x_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $x_2 = (\mathrm{i}, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $x_3 = (0, \mathrm{i}, 0)^{\mathrm{T}}$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$ bilden. Weiter seien $y_1 = (5\mathrm{i}, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $y_2 = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ und $y_3 = (0, 1 + \mathrm{i}, 0)^{\mathrm{T}}$ gegeben. Finden Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ mit $f(x_i) = y_i$. Berechnen Sie außerdem $f((\mathrm{i}, 0, 1)^{\mathrm{T}})$.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie für alle linearen Abbildungen f aus Aufgabe 1 $\mathrm{Bild}\,(f)$ und $\mathrm{Kern}\,(f)$.

Aufgabe 4
Beweisen Sie Korollar 3.9 aus der Vorlesung.

Aufgabe 5
Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume mit $\dim V = \dim W$ und $f : V \to W$ linear. Zeigen Sie: f ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ f ist injektiv oder surjektiv.

Aufgabe 6
Seien V, W Vektorräume und $f : V \to W$ linear. U sei ein Vektorraum-Komplement von $\mathrm{Kern}\,(f)$ in V, d.h. $V = U \oplus \mathrm{Kern}\,(f)$. Zeigen Sie, dass $f_U : U \to \mathrm{Bild}\,(f)$, $x \mapsto f_U(x) := f(x)$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 7
Seien V, W, U Vektorräume und $f : V \to W$, $g : W \to U$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass $g \circ f : V \to U$ linear ist.

Aufgabe 8
Begründen Sie, dass $K^{m\times n}$ ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 9
Geben Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme an:

(a)
$$\begin{aligned} 6x + 3y + 4z &= -1 \\ 3x + 3y + 2z &= -11 \\ -3x - 3y &= 21 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - 3z &= -1 \\ 5x - 2y + 3z &= 1 \\ -3x + y &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} a + b - 2c + 3d - e &= 8 \\ -2a - b + 2d + 2e &= -8 \\ a + 3b - c + 3e &= 17 \\ -b + 4c - d - 2e &= 4 \\ 3a + 2b - c - d &= 18 \end{aligned}$$

Aufgabe 10
Gesucht ist eine sechsstellige Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Nimmt man ihre letzte Ziffer fort und setzt sie an den Anfang, so entsteht eine neue sechsstellige Zahl $M \in \mathbb{N}$, die fünfmal so groß ist wie die ursprüngliche Zahl.