FLA
L2,1

Übungen 2

1. $S_n = \{ f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} : f \text{ bijektiv}\}$

<u>Beh:</u> $(S_n, \circ)$ ist Gruppe

<u>Bew:</u> 1) $f = id$ ist neutrales Element

2) Zu $f \in S_n$ gibt es stets $f^{-1} \in S_n$, da f bijektiv ist.

3) Die Hintereinanderausführung „$\circ$" ist assoziativ, außerdem ist für $f, g \in S_n$ $f \circ g$ wieder bijektiv, also $f \circ g \in S_n$ ■

Es gilt: $|S_n| = n!$

<u>$n = 1$:</u> $S_1 = \{id\}$

<u>$n = 2$:</u> $S_2 = \{id, f_{\text{Tauschen}}\}$, wobei $f_{\text{Tauschen}} : \{1,2\} \to \{1,2\}$ gerade $f_{\text{Tauschen}}(1) = 2$, $f_{\text{Tauschen}}(2) = 1$ erfüllt.

Diese beiden Gruppen sind Abelsch. Für $n \geq 3$ ist S_n <u>nicht Abelsch</u>.

Im Vergleich mit $|X| = n$ gilt: $|X^X| = n^n \gg |S_n|$ (für große n).

2. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$.

a) Ist H eine Untergruppe von G, dann muss $e_H = e_G$ sein:

$\forall h \in H$ gilt $e_H \circ h = h$. Da $h \in H \subseteq G$, folgt (multipliziert von rechts)

$$e_H \circ h \circ h^{-1} \overset{\downarrow}{=} h \circ h^{-1} = \underline{e_G}$$

$$\overset{\text{in } H}{=}\qquad\qquad \overset{\text{in } G}{\downarrow}$$

$$e_H \circ e_G = \underline{e_H}$$

b) <u>Zweites Untergruppenkriterium:</u> H Untergruppe $\Leftrightarrow a \circ b^{-1} \in H \;\forall a, b \in H$

<u>Beweis:</u> „$\Leftarrow$" 1) Sei $a \in H \subseteq G$, dann ist $a \circ a^{-1} = e$, d.h. $e \in H$ ist neutrales Element. a^{-1} existiert, da $a \in G$ Gruppe.

2) Sei $b \in H \subseteq G$ beliebig. Für $a = e$ gilt: $e \circ b^{-1} = b^{-1} \in H$

3) Die Assoziativität wird von G auf H vererbt.

„$\Rightarrow$" Ist H Untergruppe von G, so folgt sofort $a \circ b^{-1} \in H \;\forall a, b \in H$.

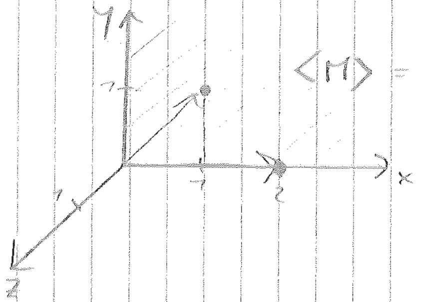
■

FLA

L2,2

3. $V=\mathbb{R}^3$, $M=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, V ist reeller Vektorraum

i) $\langle M\rangle = \bigcap\{W: W\subseteq V,\ W \text{ UVR und } W\supseteq M\}$



$\langle M\rangle$ = x-y-Ebene

ii) $\operatorname{Span} M = \left\{x\in V:\ x=\tilde{\alpha}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\tilde{\beta}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in\mathbb{R}\right\} =$

$= \left\{x\in V:\ x=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$ = x-y-Ebene

iii) Beh: $\langle M\rangle = \operatorname{Span} M$

Beweis: „$\subseteq$" Sei $x\in\langle M\rangle$, d.h. $\forall$ UVR $W\subseteq V$ mit $W\supseteq M$ gilt $x\in W$. Da $\operatorname{Span} M$ ein UVR von V ist und $M\subseteq \operatorname{Span} M$ gilt, folgt $x\in\operatorname{Span} M$.

„$\supseteq$" Sei $x\in\operatorname{Span} M$ und $W\subseteq V$ beliebige UVR mit $W\supseteq M$ (diese existiert, da z.B. $W=V$). Es ist $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ ($x_i\in M$), also $x\in W$ ($W\supseteq M$ UVR). Daher gilt $\operatorname{Span} M\subseteq W$. Da W beliebig war, folgt $x\in\langle M\rangle$. //

4. Sei V ein K-VR, $A,B\subseteq V$.

a) Beh: $B\subseteq\operatorname{Span} A \iff \operatorname{Span}(A\cup B)=\operatorname{Span} A$

Bew: „$\Rightarrow$" Sei $B\subseteq\operatorname{Span} A$, d.h. $B\ni b=\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i$, $a_i\in A$

Es ist

$$\operatorname{Span}(A\cup B)=\left\{x\in V:\ x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i+\sum_{i=1}^{m'}\beta_i b_i,\ \alpha_i,\beta_i\in K\right\}=$$

$$=\left\{x\in V:\ x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i+\sum_{i=1}^{m'}\beta_i\sum_{j=1}^{n_i}\xi_j a_j\right\}=$$

$$=\left\{x\in V:\ x=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i a_i\right\}=\operatorname{Span}(A)$$

FLA
L2,3

Möchte man dies ohne Nennung der Linearkombinationen beweisen, so gilt:

$B \subseteq \text{Span } A \Rightarrow A \cup B \subseteq \text{Span } A$, da sicher $A \subseteq \text{Span } A$.

Daraus folgt $\text{Span}(A \cup B) \subseteq \text{Span}(A)$. Auch ist sicher $\text{Span}(A) \subseteq \text{Span}(A \cup B)$, was $\text{Span}(A \cup B) = \text{Span}(A)$ zeigt.

„$\Leftarrow$" Es gelte $\text{Span}(A \cup B) = \text{Span}(A)$. Da $B \subseteq A \cup B \subseteq \text{Span}(A \cup B) = \text{Span}(A)$ gilt, folgt die Behauptung.

b) Beh: $\text{Span}(\text{Span}(A)) = \text{Span}(A)$

Bew: „$\supseteq$" Da $A \subseteq \text{Span}(A)$ gilt, folgt $\text{Span}(A) \subseteq \text{Span}(\text{Span}(A))$.

„$\subseteq$" Sei $x \in \text{Span}(\text{Span}(A))$, d.h. mit $x_i \in \text{Span}(A)$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j a_j ,$$

wobei $\gamma_j := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} \in K$. Damit ist $x \in \text{Span}(A)$.

c) Beh: W UVR $\Leftrightarrow \text{Span}(W) = W$

Bew: „$\Rightarrow$" W UVR $\Rightarrow \text{Span}(W) = \langle W \rangle = W$

„$\Leftarrow$" $W = \text{Span}(W) = \langle W \rangle$ ist UVR.

5. $GF_p := (\{1, \dots, p\}, \oplus, \otimes)$ ist ein Körper, falls p prim ist.

(1) $(\{1, \dots, p\}, \oplus)$ ist Abelsche Gruppe ✓ $(0 = p)$

(2) $(\{1, \dots, p-1\}, \otimes)$ ist Abelsche Gruppe ✓

i) Insbesondere ist $\otimes$ abgeschlossen, denn wäre $(a, b \leq p-1)$ $a \otimes b = p$, d.h. $a \cdot b = k \cdot p$ $(k \in \mathbb{Z})$, d.h. p ist ein Teiler des Produktes $a \cdot b$. Da p prim ist geht das aber nur, wenn p einen der beiden Faktoren teilt, was wegen $a, b \leq p-1$ nicht möglich ist. ✓

FLA
L7,4

ii) Wir zeigen, dass es zu jedem $a \in \{1, \dots, p-1\}$ ein Inverses bzgl. $\otimes$ gibt: Betrachte dazu

$M_a := \{1 \otimes a, 2 \otimes a, \dots, (p-1) \otimes a\} \subseteq \{1, \dots, p-1\}$, denn $\otimes$ ist abgeschlossen. Angenommen $M_a \neq \{1, \dots, p-1\}$, dann gäbe es i, j mit $i > j$ sodass $i \otimes a = j \otimes a$.

$\Rightarrow (i-j) \otimes a = p \ (=0)$, d.h. $(i-j) \cdot a = k \cdot p \ (k \in \mathbb{Z})$

Dies ist wegen p prim wieder ausgeschlossen, also folgt, dass doch $M_a = \{1, \dots, p-1\}$ gilt. Insbesondere gilt $1 \in M_a$, d.h. $\forall a \in \{1, \dots, p-1\} \ \exists a^{-1}: a \otimes a^{-1} = 1$.

(3) Im Falle, dass p nicht prim ist, enthält GF_p Nullteiler, d.h. $a, b < p$ mit $a \otimes b = p \ (=0)$, was dazu führt, dass diese a, b kein Inversen haben. GF_p kann dann kein Körper sein!

6. Zu zeigen sind die Äquivalenzen in Lemma 2.12:

i) ⇒ ii) Angenommen $x_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} \alpha_i x_i$, so setze $\alpha_{i_0} := -1$

und es gilt $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ mit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$. Das ist nicht möglich, da $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ linear unabhängig sind.

ii) ⇒ i): Angenommen es sind die $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ nicht linear unabhängig, d.h. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ ist für $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ möglich.
Es gibt also $\alpha_{i_0} \neq 0$ und es gilt

$$x_{i_0} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}}\right) \alpha_i$$

, d.h. x_{i_0} ist Linearkombination der anderen Vektoren. Dies beweist die Behauptung.

i) ⇒ iii) Betrachte zwei Darstellungen $V \ni x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$.

Dann ist $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ ✓

FLA
L2,5

<u>iii) $\Rightarrow$ i)</u> Wäre $0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ mit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ möglich, dann hätte $0 \in V$ zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination der x_i. $\lightning$

7. Sei $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3\}$ linear unabhängig, aber $\{x_1, x_2, x_3\}$ ist linear abhängig.

8. $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $A = \{f \in V : f \text{ gerade}\}$
$B = \{f \in V : f \text{ ungerade}\}$

Es gilt: $A, B \subseteq V$ sind UVR von V. Der Nachweis erfolgt über die punktweise Auswertung von $f + \lambda g$.

9. <u>Beh:</u> Für $M \subseteq V$ linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraumes V und $y \in V$, $y \notin \text{Span}\, M$, ist $M \cup \{y\}$ linear unabhängig.

<u>Bew:</u> Betrachte $x_1, \dots, x_n \in M \cup \{y\}$ paarweise verschieden. Ist $x_i \in M$ $\forall i = 1, \dots, n$, dann sind die Vektoren nach Voraussetzung linear unabhängig. Sei also o.E. $x_n = y$ und $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Wäre $\alpha_n \neq 0$, dann würde $y \in \text{Span}(M)$ gelten. Also ist $\alpha_n = 0$, d.h. $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i = 0$. Nach Voraussetzung ist $\alpha_i = 0$ $\forall i = 1, \dots, n-1$, also insgesamt $M \cup \{y\}$ linear unabhängig.

FLA
L 2,6

10. a) $\mathbb{R}$-VR $V = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\dim V = 1$

b) $\mathbb{C}$-VR $V = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\dim V = 1$

c) $\mathbb{R}$-VR $V = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\dim V = 2$

d) $\mathbb{C}$-VR $V = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\dim V = 1$

11. $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ist ein Körper mit

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

(Vergleiche dies mit GF_2)

a) $\mathbb{Z}_2$-VR $V = \mathbb{Z}_2$ $\Rightarrow$ $\dim V = 1$, $B = \{1\}$

b) K-VR $V = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\dim V = 0$, $B = \emptyset$