Ferienkurs Lineare Algebra 1

TUM – WS 2012/13

Übungsblatt 2 – Gruppen, Körper, Vektorräume

Robert Lang (rl@ph.tum.de) Dienstag, 19. März 2013

Aufgabe 1
Zeige, dass $(S_n, \circ)$ eine Gruppe ist. Welche Ordnung hat S_n? Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist S_n Abelsch? Vergleichen Sie abschließend $|Y^X|$ und $|S_n|$.

Aufgabe 2
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$. Zeigen Sie:

(a) Ist H eine Untegruppe von G, so sind ihre neutralen Element identisch.

(b) H ist Untergruppe $\Leftrightarrow$ $a \circ b^{-1} \in H$ für alle $a, b \in H$. (sog. Zweite Untergruppenkriterium)

Aufgabe 3
Sei $V = \mathbb{R}^3$ ein reeller Vektorraum. $M = \{(2,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$. Bestimmen Sie $\langle M \rangle$ und $\operatorname{Span} M$. Beweisen Sie anschließend Satz 2.8.

Aufgabe 4
Beweisen Sie: Sei V ein VR und $A, B \supseteq V$, so gelten:

(a) $B \subseteq \operatorname{Span} A \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Span}(A \cup B) = \operatorname{Span} A$

(b) $\operatorname{Span}(\operatorname{Span} A) = \operatorname{Span} A$

(c) A ist UVR $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Span} A = A$.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p durch $\mathrm{GF}_p := (\{1, \ldots, p\}, \oplus, \otimes)$, wobei $a \oplus b := a + b \pmod p$ und $a \otimes b := a \cdot b \pmod p$ die Addition und Multiplikation modulo p bezeichnen, ein Körper definiert wird. Warum gilt dies nur, wenn p eine Primzahl ist?

Aufgabe 6
Beweisen Sie die Äquivalenz der drei Aussagen aus Lemma 2.12.

Aufgabe 7
Finden Sie ein Beispiel dafür, dass $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, sowie $\{x_2, x_3\}$ linear unabhängig sind, aber $\{x_1, x_2, x_3\}$ linear abhängig ist.

Aufgabe 8
Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sowie die Mengen

$$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Sind A, B Untervektorräume von V?

Aufgabe 9
Sei $M \subseteq V$ linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V. Ferner sei $y \in V$ mit $y \notin M$. Zeigen Sie, dass $M \cup \{y\}$ eine linear unabhängige Menge ist.

Aufgabe 10
Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Vektorräume:

(a) $\mathbb{R}$-VR $V = \mathbb{R}$

(b) $\mathbb{C}$-VR $V = \mathbb{R}$

(c) $\mathbb{R}$-VR $V = \mathbb{C}$

(d) $\mathbb{C}$-VR $V = \mathbb{C}$

Aufgabe 11
Überzeugen Sie sich, dass $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ mit der Additions- und Multiplikationstabelle aus der Vorlesung tatsächlich ein Körper ist. Bestimmen Sie dann die Dimensionen der folgenden Vektorräume und geben Sie deren Basis an:

(a) $\mathbb{Z}_2$-VR $V = \mathbb{Z}_2$

(b) K-VR $V = \{0\}$