FLA

L1,1

Übungen 1

1. a) $(A \cup B) \cup (A \setminus B) = A \cup B$

   b) $(A \cup B) \setminus (B \setminus A) = A$

   c) $(A \cup B) \cap (A \setminus B) = A \setminus B$

   d) $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

   e) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$

   f) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$

2. Definition 1.1: $\text{Graph } f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$, $f: X \to Y$, sowie $f(X) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in X\}$

$\Rightarrow \left[\text{Graph } f = X \times f(X) \iff \underline{f \text{ ist konstant}}\right]$

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" Angenommen f wäre nicht konstant, d.h. $f(X)$ ist mindestens zweielementig: $Y \supseteq f(X) \supseteq \{y_1, y_2\}$ mit $y_1 \neq y_2$.
Für beliebiges $x \in X$ gilt dann $(x, y_1) \in X \times f(X)$, $(x, y_2) \in X \times f(X)$.
Nach Lemma 1.2 folgt nun, dass $X \times f(X)$ nicht Graph einer Abbildung sein kann. Dies impliziert die Richtung „$\Rightarrow$".
„$\Leftarrow$" Ist f konstant, dann gibt es $y_0 \in Y$ mit $f(x) = y_0 \ \forall x \in X$.
Dann ist $\text{Graph } f := \{(x,y) : x \in X \text{ und } y = f(x)\} =$
$= \{(x,y) : x \in X, \ y = y_0\} = X \times f(X)$.

3. Betrachte X mit $|X| = n$, und Y mit $|Y| = m$.
$Y^X = \{f : X \to Y\}$, d.h. um f festzulegen, muss bestimmt sein auf welches der m Elemente aus Y jedes einzelne Element aus X abgebildet wird. Dafür gibt es $\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n\text{-mal}} =$
$= m^n$ Möglichkeiten. Also: $|Y^X| = m^n$.

FLA
L 1,2

$n=2,\ m=3 \Rightarrow |Y^X| = m^n = 9$

f_i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
$f_i(x_1)$	y_1	y_1	y_1	y_2	y_2	y_2	y_3	y_3	y_3
$f_i(x_2)$	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3

$n=3,\ m=2 \Rightarrow |Y^X| = m^n = 8$

f_i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
$f_i(x_1)$	y_1	y_1	y_1	y_1	y_2	y_2	y_2	y_2
$f_i(x_2)$	y_1	y_1	y_2	y_2	y_1	y_1	y_2	y_2
$f_i(x_3)$	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2

4. Die Potenzmenge einer Menge M ist $P(M) := \{A \subseteq M\}$ die Menge aller Teilmengen von M.
Sei M endlich mit $|M| = n \in \mathbb{N}_0$. Eine jede Teilmenge $A \subseteq M$ ist bestimmt, wenn man angibt ob ein Element $m \in M$ in A sein soll, oder nicht. Dies sind $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ mal}} = 2^n$ mögliche Teilmengen, weshalb gilt:
$$|M| = n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$$
Diese Eigenschaft wird durch $P(M) = 2^M$, auch für unendliche Mengen M, illustriert.

5. Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung, $A, B \subseteq X$.
(1) Zu zeigen: $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.
Sei also $y \in f(A)$, d.h. $\exists x \in A: f(x) = y$. Aus $A \subseteq B$ folgt $x \in B$, also $y = f(x) \in f(B)$. ∎

FLA
L1,3

(2) Zu zeigen: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

„$\subseteq$" Sei $y \in f(A \cup B)$, d.h. $\exists x \in A \cup B: f(x) = y$. Damit gilt $x \in A$ oder $x \in B$, also $y = f(x) \in f(A)$ oder $y = f(x) \in f(B)$. Das bedeutet $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

„$\supseteq$" Sei $y \in f(A) \cup f(B)$, d.h. $y \in f(A)$ oder $y \in f(B)$. Daher existiert ein $x \in A$ mit $f(x) = y$, oder $x \in B$ mit $f(x) = y$. Das bedeutet, dass es ein $x \in A \cup B$ gibt mit $y = f(x)$, also $y \in f(A \cup B)$.

6. Zu zeigen: Die Urbildabbildung f^{-1} ist treu bezgl. $\{\subseteq, \cup, \cap, \setminus\}$.

(1) Bd.: $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

Sei $x \in f^{-1}(A)$, d.h. $f(x) = y$ für ein $y \in A$. Da $A \subseteq B$ gilt, folgt $y \in B$. Damit $f(x) = y \in B$, d.h. $x \in f^{-1}(B)$.

(2) – (4) werden gezeigt durch „$\subseteq$" und „$\supseteq$" und ähnlichen Argumenten wie bisher.

7. Für $f: X \to Y$ sei $F: X \to \text{Graph } f$, $F(x) = (x, f(x))$.

i) F ist injektiv, da für $x \neq y$ gilt $F(x) = (x, f(x)) \neq (y, f(y)) = F(y)$.

ii) Für jedes $y \in \text{Graph } f$, $y = (x, f(x))$, folgt sofort, dass für $x \in X$ gilt: $F(x) = y$. Also ist F surjektiv.

$\Rightarrow F$ ist bijektiv. ✓

8. a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = xy$

f ist nicht injektiv, da $f(x,y) = f(y,x)$ und $(x,y) \neq (y,x)$ im Allgemeinen.

f ist surjektiv, da für $z \in \mathbb{R}$ gilt: $f(z,1) = z \cdot 1 = z$ und $(z,1) \in \mathbb{R}^2$.

FLA
L 1.4

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto g(x) = (x^2+1,\ (x+1)^2)$

g ist <u>injektiv</u>, denn sei $g(x) = g(y)$, dann gelten

$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & x^2+1 = y^2+1 \iff |x| = |y| \\ \text{ii)} & (x+1)^2 = (y+1)^2 \iff |x+1| = |y+1| \end{array}\right\} \iff x = y$

g ist <u>nicht surjektiv</u>, da $x^2+1 \geq 1$ und $(x+1)^2 \geq 0$ ist, d.h. für $z = (0,0)$ gilt $z \notin g(\mathbb{R})$.

9. Seien $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ und $f: X \to Y$.

a) Ist f surjektiv, dann gelten:

1) $f(f^{-1}(B)) = B \cap \underbrace{f(X)}_{=Y} = B$

2) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (bleibt unverändert)

b) Ist f injektiv, dann gelten:

1) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ (bleibt unverändert)

2) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$, denn sei $x \in X$ mit $x \in f^{-1}(f(A))$.

$\Rightarrow f(x) \in f(A)$, d.h. $\exists x_0 \in A$ mit $f(x) = f(x_0)$. Da f injektiv ist, folgt $x = x_0 \in A$.

10. Seien $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h := g \circ f: X \to Z$.

(1) <u>Beh</u>: $h(A) = g(f(A))\ \forall A \subseteq X$

„$\subseteq$" Sei $z \in h(A)$, d.h. $\exists x \in A \subseteq X$ mit $h(x) = z$. Es ist $z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, d.h. $z \in g(f(A))$, da $f(x) \in f(A)$.

„$\supseteq$" Sei $z \in g(f(A))$, d.h. $\exists y \in f(A) \subseteq Y$ mit $g(y) = z$. Damit $\exists x \in A \subseteq X$ mit $f(x) = y$. Insgesamt gibt es also $x \in A$ mit $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, d.h. $z \in h(A)$.

(2) <u>Beh.</u>: $h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

„$\subseteq$" Sei $x \in h^{-1}(B)$, d.h. $h(x) = z$ für ein $z \in B$.

Es gilt $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = z \in B$, also

FLA
1,5

$f(x) \in g^{-1}(B)$. Daraus folgt $x \in f^{-1}(g^{-1}(B))$ ✓

[Der letzte Schritt im Detail: f^{-1} ist „$\subseteq$"-treu, also $\{f(x)\} \subseteq g^{-1}(B)$, also $\{x\} \subseteq f^{-1}(\{f(x)\}) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(B))$, d.h. $x \in f^{-1}(g^{-1}(B))$]

„$\supseteq$" Sei $x \in f^{-1}(g^{-1}(B))$, also $f(x) \in g^{-1}(B)$, also $B \ni g(f(x)) = (g \circ f)(x) = h(x)$, d.h. $x \in h^{-1}(B)$.

(3) i) Seien g und f injektiv. Beh: h ist injektiv.

Bew: Seien $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(x'))$, d.h. $(g \circ f)(x) = h(x) \neq (g \circ f)(x') = h(x')$. Also ist auch h injektiv.

ii) Seien g und f surjektiv. Beh: h ist surjektiv.

Bew: Sei $z \in Z$, dann gibt es $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Ferner gibt es $x \in X$ mit $f(x) = y$. Also gilt $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, d.h. h ist surjektiv.

(4) Beh: h surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv

Bew: Angenommen g sei nicht surjektiv, d.h. $\exists z \in Z$, sodass $\forall y \in Y$ gilt $g(y) \neq z$. Damit kann aber $h = g \circ f$ auch nicht surjektiv sein.

(5) Beh: h injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

Bew: Angenommen f sei nicht injektiv, d.h. $\exists x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Dann ist aber $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = h(x')$, also kann auch h nicht injektiv sein.

(6) Assoziativität folgt aus viel Schreibarbeit ...

FLA 1,6

11. Betrachte $f, g, h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n+1$, $g(n) = n^2$, $h(n) = n^3$.

i) $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1$
$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2$ $\Big\rangle \neq$

ii) $(f \circ h)(n) = f(n^3) = n^3 + 1$
$(h \circ f)(n) = h(n+1) = (n+1)^3$ $\Big\rangle \neq$

iii) $(g \circ h)(n) = g(n^3) = (n^3)^2 = n^6$
$(h \circ g)(n) = h(n^2) = (n^2)^3 = n^6$ $\Big\rangle =$ ✓

12. Es gilt: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}^2 \sim \mathbb{Q}$

$\boxed{\mathbb{Z}}$ Betrachte die Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit

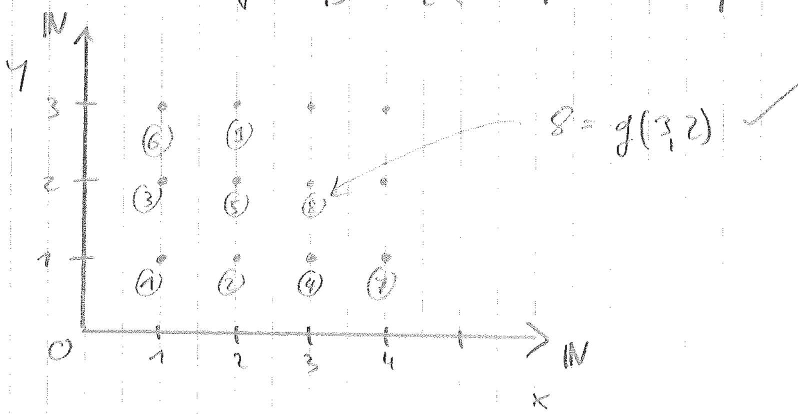
$$n \mapsto f(n) = \begin{cases} m & \text{, falls } n = 2m, \; m \in \mathbb{N} \\ -m & \text{, falls } n = 2m+1, \; m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

d.h. $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 2$, ...

$\to \mathbb{Z}$						
$f(n) =$	-2	-1	0	1	2	3
$n =$	5	3	1	2	4	6

$\boxed{\mathbb{N}^2}$ Betrachte hier $g: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-2)(x+y-1) + y$$



Da f und g <u>bijektiv</u> sind, folgt $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}^2$.

FLA
1,7

$\boxed{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ folgt durch Kombination von $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}^2$.

13. Betrachte die zwei Relationen R_1, R_2 auf $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2)\, R_1\, (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 = y_1$$

$$(x_1, x_2)\, R_2\, (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 < y_2$$

	reflexiv	symmetrisch	transitiv
R_1	✓	✓	✓
R_2	✗	✗	✓