# Ferienkurs Lineare Algebra 1

## TUM – WS 2012/13

## Übungsblatt 1 – Grundlagen: Abbildungen und Mengen

Robert Lang (rl@ph.tum.de) Montag, 18. März 2013

---

**Aufgabe 1**
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $(A \cup B) \cup (A \backslash B)$

(b) $(A \cup B) \backslash (B \backslash A)$

(c) $(A \cup B) \cap (A \backslash B)$

(d) $(A \backslash B) \cap (A \cap B)$

(e) $(A \cap B) \cup (A \backslash B)$

(f) $(A \backslash B) \backslash (B \backslash A)$

**Aufgabe 2**
Welches Kriterium (d.h. eine notwendige sowie hinreichende Bedingung) muss gelten für $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$, damit Graph $f = X \times f(X)$ erfüllt ist? Beweisen Sie Ihre Vermutung!

**Aufgabe 3**
Wie groß ist die Menge $Y^X$, wenn $X$ $n$ Elemente und $Y$ $m$ Elemente besitzt? Geben Sie alle Abbildungen im Falle von $n = 2$, $m = 3$ und $n = 3$, $m = 2$ an.

**Aufgabe 4**
Warum wird die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ oft auch als $2^M$ geschrieben? Überlegen Sie zunächst, wie groß die Potenzmenge einer $n$-elementigen Menge ist.

**Aufgabe 5**
Beweisen Sie die Treue von Abbildungen $f$ bzgl. "$\subseteq$" und "$\cup$", d.h.

(1) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

(2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

**Aufgabe 6**
Führen Sie den Beweis zu Lemma 1.4, d.h. beweisen Sie die Treue von $f^{-1}$.

**Aufgabe 7**
Zeigen Sie, dass für $f \in Y^X$ die Abbildung $F : X \to \operatorname{Graph} f$, $x \mapsto F(x) = (x, f(x))$ bijektiv ist.

**Aufgabe 8**
Untersuchen Sie die beiden folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = xy$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto g(x) = (x^2 + 1, (x + 1)^2)$

**Aufgabe 9**
Was geschieht mit den Aussagen in Lemma 1.5, wenn

(a) $f$ surjektiv ist,

(b) $f$ injektiv ist?

**Aufgabe 10**
Beweisen Sie die Aussagen in Lemma 1.7.

**Aufgabe 11**
Seien $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Abbildungen, definiert durch $n \mapsto f(n) = n + 1$, $n \mapsto g(n) = n^2$, und $n \mapsto h(n) = n^3$. Gilt $f \circ g = g \circ f$, $f \circ h = h \circ f$ oder $g \circ h = h \circ g$?

**Aufgabe 12**
Begründen Sie, dass die folgenden Mengen gleich mächtig zu $\mathbb{N}$ sind: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$

**Aufgabe 13**
Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ werden zwei Relationen $R_1$, $R_2$ definiert:

$$(x_1, x_2) R_1 (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 = y_1$$

$$(x_1, x_2) R_2 (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 < y_1$$

Untersuchen Sie diese auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.