Lösung zur Übungsklausur Ferienkurs Quantenmechanik

David Franke und Michael Drews

September 14, 2012

1 Projektoralgebra

(a)
$$\hat{P}_\alpha^m = |\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|...|\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{P}_\alpha$$

Da $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ ergibt sich die Identität. **[1 P]**
Sei $|\beta\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{P}_\beta$ zum Eigenwert λ.

$$\hat{P}_\beta|\beta\rangle = \lambda|\beta\rangle = \hat{P}_\beta^2|\beta\rangle = \lambda^2|\beta\rangle = \hat{P}_\beta^3|\beta\rangle = \lambda^3|\beta\rangle$$

Also ist
$$\lambda = \lambda^2 = \lambda^3$$

Dies ist nur möglich für $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$. **[1 P]**
Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind (komplexe) Vielfache von $|\alpha\rangle\rangle$. Die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind Vektoren, die orthogonal zu $|\alpha\rangle$ stehen. **[1 P]**

(b) Die $|e_j\rangle$ bilden eine orthonormale Basis des Hilbertraums. Also lässt sich jeder Vektor $|f\rangle$ in dieser Basis ausdrücken **[1 P]**:

$$|f\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_n|e_j\rangle$$

Ein Operator ist durch seine Wirkung auf einen Vektor charakterisiert:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}|e_j\rangle\langle e_j|\right)|f\rangle &= \sum_{j=1}^{n}|e_j\rangle\langle e_j|f\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{n}|e_j\rangle c_j = \sum_{j=1}^{n} c_j|e_j\rangle = \\ &= |f\rangle = \mathbb{1}\cdot|f\rangle\end{aligned}$$

da $\langle e_j|f\rangle = c_j$ ist **[1 P]**.

(c) Die $|e_j\rangle$ bilden eine orthonormale Basis des Hilbertraums. Also lässt sich jeder Vektor $|f\rangle$ in dieser Basis ausdrücken **[1 P]**:

$$|f\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_n|e_j\rangle$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{Q}|f\rangle &= \sum_{j=1}^{n} c_j\hat{Q}|e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle e_j|f\rangle\lambda_j|e_j\rangle = && \textbf{[1 P]} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\lambda_j|e_j\rangle\langle e_j|f\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|e_j\rangle\langle e_j|\right)|f\rangle && \textbf{[1 P]}\end{aligned}$$

q.e.d.

2 Eindimensionale Schrödingergleichung (18 P) - A. Buras SS2003

(a) Die Schrödingergleichung lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + V(x)\Psi = E\Psi$$

(I): Im Bereich $x < 0$ ist $V(x) = \infty$, daher gilt hier **[1 P]**:

$$\Psi^{(I)} = 0$$

(II): Für $0 < x < x_0$ lässt sich die Schrödingergleichung umformen zu:

$$\Psi'' = -\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\Psi$$

Die allgemeine Lösung lautet **[1 P]**:

$$\Psi^{(II)} = A \cdot sin(kx) + B \cdot cos(kx)$$

mit $k = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$. **[1 P]**

(III): Für $x > x_0$ lässt sich die Schrödingergleichung umformen zu:

$$\Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi$$

Die allgemeine Lösung lautet **[1 P]**:

$$\Psi^{(II)} = C \cdot e^{-qx} + D \cdot e^{qx}$$

mit $q = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$. **[1 P]**

(b) Zuerst gilt, dass die Funktion im Unendlichen gegen Null geht: **[1 P]**

$$\Psi(x \to \infty) = 0$$

Daraus folgt $D = 0$.
Einmal gilt die Stetigkeit bei $x = 0$: **[1 P]**

$$\Psi(x = 0) = 0 = Asin(0) + Bcos(0)$$

Daraus folgt $B = 0$. Und bei $x = x_0$: **[1 P]**

$$\Psi(x = x_0) = Asin(kx_0) = Ce^{-qx_0} \tag{1}$$

Desweiteren gilt die Stetigkeit der Ableitung bei $x = x_0$: **[1 P]**

$$\Psi'(x = x_0) = A \cdot k \cdot sin(kx_0) = -q \cdot C \cdot e^{-qx_0} \tag{2}$$

Einsetzen von Gleichung (1) in (2) ergibt: **[1 P]**

$$A \cdot sin(kx_0) = -A\frac{k}{q} \cdot cos(kx_0)$$

Damit ergibt sich die Gleichung: **[1 P]**

$$-cot(kx_0) = \frac{q}{k} \tag{3}$$

(c) Die Normierungsbedingung ist: **[1 P]**

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x,t)dx$$

Mit Hilfe der Stetigkeitsbedingung (bei $x = x_0$) kann man schreiben **[1 P]**:

$$A = C \cdot \frac{e^{-qx}}{sin(kx_0)} := N \cdot \alpha$$

mit $N := C$ und $\alpha := \frac{e^{-qx}}{sin(kx_0)}$. Also wird aus der Normierungsbedingung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x,t)dx &= N^2 \cdot \left(\int_0^{x_0} \alpha^2 sin^2(kx)dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{-2qx}dx \right) = \\
&= N^2 \cdot \left(\alpha^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{sin(2kx)}{k} \right]_0^{x_0} + \left[\frac{-1}{2q} e^{-2qx} \right]_{x_0}^{\infty} \right) = \\
&= N^2 \cdot \left(\frac{e^{-2qx_0}}{sin^2(kx_0)} \cdot \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{4}\frac{sin(2kx_0)}{k} \right) + \frac{1}{2q} e^{-2qx_0} \right) = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich: **[1 P]**

$$N = \sqrt{\frac{e^{2qx_0}}{\frac{1}{sin^2(kx_0)} \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{4}\frac{sin(2kx_0)}{k} \right) + \frac{1}{2q}}}$$

(d) Gleichung (3) lässt sich mit der Variablensubstitution $z = kx_0$ und $z_0 = \frac{x_0}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$ umschreiben als

$$-cot(z) = \sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1} \tag{4}$$

(Hinweis: Dazu war es wichtig die transzendete Gleichung mit $\frac{q}{k}$ und NICHT $\frac{k}{q}$ auszudrücken. Nur so kürzt sich der Faktor $(E+V_0)$ raus, wenn man versucht die Gleichung $\sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1} = \frac{q}{k}$ bei gegebenem $z = kx_0$ aufzulösen)
Die zwei Seiten der transzendenten Gleichung lassen sich in ein Koordinatensystem zeichnen. Die z-Werte, bei denen sie sich schneiden kennzeichnen dann mögliche Werte für z und damit mögliche Werte für k und E, was zu einer Quantisierung führt.

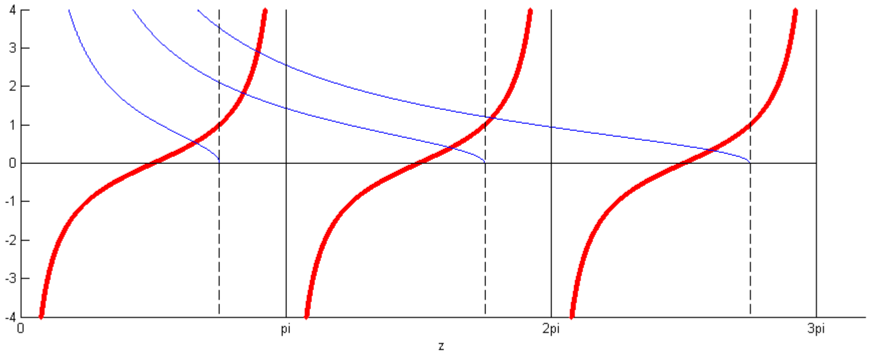
Setzt man nun

$$V_0 x_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\pi^2 \left(n + \frac{3}{4})^2\right)$$

so ist

$$z_0 = \pi \left(n + \frac{3}{4}\right) \textbf{[1 P]}$$

Zeichnet man nun die beiden Seiten der Gleichung (4) in ein Koordinatensystem so ergibt sich folgendes Bild: **[2 P]**



Wie man sieht führt die Erhöhung von n um 1 immer zu genau einem weiteren Schnittpunkt, womit die Anzahl der möglichen Zustände als **[1 P]**

$$N_{max} = n + 1$$

gegeben ist.

3 Larmor-Präzession

(a) Finde zuerst die Eigenzustände von $\hat{S}_y$:

$$det(\hat{S}_y - \lambda \mathbb{1}) = \frac{\hbar}{2} \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2^2} = 0$$

Daher folgen die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm\frac{\hbar}{2}$.
Finde nun den Eigenzustand zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{\hbar}{2}$:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

Daraus folgt $a = -ib$ bzw. $ia = b$. Also ist **[1 P]**

$$|+\rangle^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Finde nun den Eigenzustand zum Eigenwert $\lambda_2 = -\frac{\hbar}{2}$:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

Daraus folgt $a = ib$ bzw. $ia = -b$. Also ist **[1 P]**

$$|-\rangle^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich der Anfangszustand in Basis der Eigenzustände des $\hat{S}_z$-Operators als **[1 P]**

$$|+\rangle^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i \cdot |-\rangle)$$

ausdrücken.

(b) Der Zustand des Teilchen $|\Psi_t\rangle$ zur Zeit t lässt sich berechnen durch **[1 P]**

$$|\Psi_t\rangle = e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}} |\Psi_0\rangle$$

Berechne zuerst den Zeitentwicklungsoperator $e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}$. Der Hamiltonian lässt sich schreiben als

$$\hat{H} = -\mu_B B \hat{S}_z = -\mu_B B \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da dies eine Diagonalmatrix ist, ergibt sich für den Zeitentwicklungsoperator einfach **[1 P]**

$$e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\mu_B B t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\mu_B B t}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

mit $\omega = \frac{\mu_B B}{2}$.
Daher ergibt sich für den Zustand $|\Psi_t\rangle$

$$|\Psi_t\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ i \cdot e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

Das Elektron befindet sich nach der Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\mu_B B}$ wieder im Ausgangszustand. **[1 P]**

(c) Der Erwartungswert ist $\langle \Psi_t | \vec{S} | \Psi_t \rangle$ **[1 P]** . Berechne dies für alle drei Raumrichtungen separat. Für die x-Richtung ergibt sich: **[1 P]**

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & -i \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ i \cdot e^{-i\omega t} \end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & -i \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \cdot e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{4}(ie^{-2i\omega t} - ie^{2i\omega t}) = \\ &= \frac{\hbar}{2} sin(2\omega t)\end{aligned}$$

Für die y-Richtung ergibt sich: **[1 P]**

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & -i \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ i \cdot e^{-i\omega t} \end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & -i \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ i \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{4}(e^{-2i\omega t} + e^{2i\omega t}) = \\ &= \frac{\hbar}{2} cos(2\omega t)\end{aligned}$$

Für die z-Richtung ergibt sich: **[1 P]**

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & -i \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ i \cdot e^{-i\omega t} \end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & -i \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ -ie^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\hbar}{4}(0 - 0) = \\ &= 0\end{aligned}$$

Damit ist der Erwartungswert

$$\langle \Psi_t | \vec{S} | \Psi_t \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} sin(2\omega t) \\ cos(2\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Erwartungswert des Spins präzediert also in der $x-y$-Ebene um die z-Achse mit der Larmorfrequenz $2\omega = \mu_B B$.

4 Gestörter Harmonischer Oszillator

Mit $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ gilt (Vereinfachung, nicht gefordert)

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{x} + \frac{i}{\hbar\alpha} \hat{p} \right) \tag{5}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] &= \frac{1}{2} \left[\alpha\hat{x} + \frac{i}{\hbar\alpha}\hat{p}, \alpha\hat{x} - \frac{i}{\hbar\alpha}\hat{p} \right] && (6)\\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\alpha\hat{x}, -\frac{i}{\hbar\alpha}\hat{p} \right] + \left[\frac{i}{\hbar\alpha}\hat{p}, \alpha\hat{x} \right] \right) && (7)\\
&= \frac{i}{2\hbar} \left(- [\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{p}, \hat{x}] \right) && (8)\\
&= -\frac{i}{\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] && (9)\\
&= 1 && (10)
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt für das Produkt der beiden operatoren

$$\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger \hat{a} &= \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \hat{x}^2 + \frac{i}{\hbar} \hat{x}\hat{p} - \frac{i}{\hbar} \hat{p}\hat{x} + \frac{\hat{p}^2}{\hbar^2 \alpha^2} \right) && (11)\\
&= \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \hat{x}^2 + \frac{i}{\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] + \frac{\hat{p}^2}{\hbar^2 \alpha^2} \right) && (12)\\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} x^2 - 1 + \frac{p^2}{\hbar m \omega} \right) && (13)\\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} \right) - \frac{1}{2} && (14)
\end{aligned}$$

Damit folgt die gefragte Gleichung

$$H_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \tag{15}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
E_0 \mid 0\rangle = \hat{H}_0 \mid 0\rangle &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \mid 0\rangle && (16)\\
&= \hbar\omega \hat{a}^\dagger \underbrace{\hat{a} \mid 0\rangle}_{=0} + \hbar\omega \frac{1}{2} \mid 0\rangle && (17)\\
&= \frac{1}{2} \hbar\omega \mid 0\rangle && (18)\\
& && (19)
\end{aligned}$$

Damit lautet die Grundzustandsenergie

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \tag{20}$$

Nun betrachten wir die Energie E_{n+1} des Zustands $\hat{a}^\dagger \mid n\rangle$:

$$\begin{aligned}
E_{n+1}\left(\hat{a}^\dagger \mid n\rangle\right) &= H^0\left(\hat{a}^\dagger \mid n\rangle\right) && (21)\\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\right) \mid n\rangle && (22)\\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \underbrace{[\hat{a},\hat{a}^\dagger]}_{=1}) + \hat{a}^\dagger\frac{1}{2}\right) \mid n\rangle && (23)\\
&= \hat{a}^\dagger\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \mid n\rangle + \hat{a}^\dagger\hbar\omega \mid n\rangle && (24)\\
&= \hat{a}^\dagger E_n \mid n\rangle + \hbar\omega\hat{a}^\dagger \mid n\rangle && (25)\\
&= (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger \mid n\rangle && (26)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$E_{n+1} = E_n + \hbar\omega \tag{27}$$

Als letztes folgt aus beiden Ergebnissen durch das n fache Anwenden von $\hat{a}^\dagger$ auf $\mid 0\rangle$:

$$E_n = E_0 + n\cdot\hbar\omega = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{28}$$

(c) Es gilt:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right) \tag{29}$$

Und damit für den Störoperator

$$H_1 = \lambda\frac{1}{4\alpha^4}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)^4 \tag{30}$$

Für die Energieverschiebung gilt dann

$$\begin{aligned}
\delta E_0^{(1)} &= \langle 0 \mid H_1 \mid 0\rangle && (31)\\
&= \lambda\frac{1}{4\alpha^4}\langle 0 \mid \left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)^4 \mid 0\rangle && (32)\\
& && (33)
\end{aligned}$$

Von den möglichen Termen in $(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4 = \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \ldots$ führen solche, die nicht aus zwei Auf- und zwei Abstiegsoperatoren bestehen auf orthogonale Terme $\langle n \mid m\rangle = 0$ und verschwinden somit. Da außerdem $\hat{a} \mid 0\rangle = 0 = \langle 0 \mid \hat{a}^\dagger$ bleiben nur die Terme $\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$ stehen.

Mit $\hat{a}^\dagger \mid n\rangle = \sqrt{n+1} \mid n+1\rangle$ und $\hat{a} \mid n\rangle = \sqrt{n} \mid n-1\rangle$ erhält man dann

$$E_0^{(1)} = \lambda\frac{1}{4\alpha^4}\left(\sqrt{1^4}\langle 0 \mid 0\rangle + \sqrt{1\cdot 2\cdot 2\cdot 1}\langle 0 \mid 0\rangle\right) \qquad = \frac{3}{4}\frac{\lambda}{\alpha^4} = \frac{3}{4}\lambda\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \tag{34}$$

5 Zweidimensionales Wasserstoffatom (Musterlösung Prof. Zwerger / Dr. Enss 2009)

(a) In die stationäre Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\right)\psi(r,\varphi) = E\psi(r,\varphi) \tag{35}$$

setzt man das Potential

$$V(r) = -\frac{e^2}{\epsilon r} \tag{36}$$

und die Energie $E = -\hbar^2\kappa^2/2\mu$ des gebundenen Zustands ein und erhält so

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{e^2}{\epsilon r}\psi = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2\mu}\psi. \tag{37}$$

Den Potentialterm kann man durch den Bohr-Radius a_B ausdrücken,

$$-\frac{e^2}{\epsilon r}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{2\mu e^2}{\hbar^2\epsilon r}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{2}{a_B r}\psi \tag{38}$$

und erhält so

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{2}{a_B r}\psi = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2\mu}\psi \tag{39}$$

bzw. nach der Multiplikation mit $-2\mu/\hbar^2$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{a_B r}\psi = \kappa^2\psi. \tag{40}$$

(b) Die Wellenfunktion $\psi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten ist 2π-periodisch im Winkel,

$$\psi(r,\varphi+2\pi) = \psi(r,\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(r)e^{im\varphi}e^{2\pi im} = \psi(r)e^{im\varphi}. \tag{41}$$

Daraus folgt $e^{2\pi im} = 1$, dh m muss ganzzahlig sein.

(c) Im Grundzustand $\psi_0(r)$ ist m=0. Mit den radialen Ableitungen $\psi_0' = -\psi_0(r)/l$, $\psi_0''(r) = \psi_0(r)/l^2$ folgt die kinetische Energie

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right) = \psi_0'' + \frac{1}{r}\psi_0' = \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{rl}\right)\psi_0 \tag{42}$$

Und die stationäre Schrödingergleichung

$$\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{rl} + \frac{2}{a_B r}\right)\psi_0 = \kappa^2\psi_0. \tag{43}$$

Der Koeffizientenvergleich für $1/r$ und r^0 (r-unabhängig) ergibt, dass $\psi_0(r)$ eine Lösung ist für

$$l = \frac{a_B}{2} \qquad \text{und} \quad \kappa = \frac{1}{l} = \frac{2}{a_B} \tag{44}$$

(d) Damit folgt für die Bindungsenergie

$$E_b = \frac{\hbar^2\kappa^2}{2\mu} = 4\frac{\hbar^2}{2\mu a_B^2} = 4\mathrm{Ry} \tag{45}$$