Übungsklausur Ferienkurs Quantenmechanik

David Franke und Michael Drews

September 7, 2012

1 Projektoralgebra (8 P)

Der Projektionsoperator ist definiert durch

$$\hat{P}_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

Er nimmt die Komponente jedes beliebigen anderen Vektors $|\beta\rangle$, die entlang $|\alpha\rangle$ liegt, und projiziert sie in Richtung $|\alpha\rangle$:

$$\hat{P}_\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle|\alpha\rangle$$

(a) Sei $|\alpha\rangle$ ein normierter Zustandsvektor.
Zeigen Sie, dass

$$(\hat{P}_\alpha)^m = \hat{P}$$

Bestimme die Eigenwerte von $\hat{P}_\alpha$ und beschreibe seine Eigenvektoren. (3 P)

(b) Sie $|e_j\rangle$ eine orthonormale Basis eines n-dimensionalen Hilbertraums $\mathcal{H}$. Zeige, dass

$$\sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j| = \mathbb{1}$$

(2 P)

(c) Sei $\hat{Q}$ ein Operator mit einem vollständigen Set orthonormaler Eigenvektoren.

$$\hat{Q}|e_j\rangle = \lambda_j|e_j\rangle$$

Zeige, dass $\hat{Q}$ mithilfe seiner spektralen Dekomposition als

$$\hat{Q} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j|e_j\rangle\langle e_j|$$

geschrieben werden kann. (3 P)

2 Eindimensionale Schrödingergleichung (18 P) - A. Buras SS2003

Ein Teilchen mit Masse m un Energie $-V_0 < E < 0$ (gebundener Zustand) befinde sich in folgendem Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x \leq 0 \\ -V_0 & \text{für} \quad 0 < x < x_0 \\ 0 & \text{für} \quad x_0 \leq x \end{cases}$$

(a) Geben Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung in den Bereichen (I), (II) und (III) and. (5 P)

(b) Welche Bedingungen mußdie Lösung bei $x = 0$, $x = x_0$ und $x \to \infty$ erfüllen? Leiten Sie mit Hilfe der Anschlusßbedingungen eine Bedingung für die Energie her. (6 P)

(c) Normieren Sie die Wellenfunktion. (3 P)

(d) Ermitteln Sie graphisch die Anzahl der möglichen gebundenen Zustände, falls das Produkt aus Potentialbreite und -tiefe gegeben ist durch $V_0 x_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\pi^2\left(n+\frac{3}{4}\right)^2$. (4 P)

3 Larmor-Präzession (10 P)

Gegeben sei ein ruhendes Elektron, welches sich im normierten Eigenzustand des Operators $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ mit Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ befindet. Die Quantisierungsachse ist die z-Achse, zu welcher die zugehörigen Eigenzustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ lauten.

(a) Drücken Sie den Zustand, in dem sich das Elektron anfangs befindet, durch $|+\rangle$ und $|-\rangle$ aus. (3 P)

(b) Betrachten Sie nun den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ ein konstantes magnetischen Feld B angelegt wird, welches in z-Richtung zeigt, d.h. der zugehörige Hamilton-Operator hat die Form

$$\hat{H} = -\mu_B B \hat{S}_z$$

mit $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Berechnen sie den Zustand $|\Psi_t\rangle$ des Teilchen zur Zeit t.
Nach welcher Zeit befindet sich das Elektron wieder im Ausgangszustand? (3 P)

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Spinoperators $\vec{S}$ in allen drei Raumrichtungen abhängig von der Zeit t.
Dabei ist $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (4 P)

4 Gestörter harmonischer Oszillator (10 P)

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Masse m und Schwingungsfrequenz ω mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

erfahre eine kleine Störung durch den anharmonischen Term

$$\hat{H}_1 = \lambda\hat{x}^4.$$

(a) (3 P) Man führt die Operatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ ein:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$

Zeige, dass für die Vertauschungsrelation gilt $[\hat{a}, \hat{a}\dagger] = 1$. Zeige weiter, dass sich der ungestörte Hamiltonoperator mit diesen Operatoren schreiben lässt als

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

(b) (3 P) Es existiere ein Zustand $\mid 0\rangle$ des ungestörten Oszillators derart, dass $a \mid 0\rangle = 0$. Wie lautet die Eigenenergie E_0 von $\mid 0\rangle$? Zeige: Durch Anwenden von $\hat{a}^\dagger$ auf den Eigenzustand $\mid n\rangle$ zur Energie E_n wird diese um $\hbar\omega$ erhöht. Wie lautet die allgemeine Form der Energie E_n zum einem Eigenzustand $\mid n\rangle \propto (\hat{a}^\dagger)^n \mid 0\rangle$.

(c) (4 P) Berechne die Verschiebung der Grundzustandsenergie durch die anharmonische Störung H_1 in Störungstheorie erster Ordnung.

5 Zweidimensionales Wasserstoffatom (14 P) - Zwerger SS 09

Die Bindung zwischen einem Elektron und einem Loch (‘Exziton’) in einem Halbleiter ‘quantum-well’ kann man in guter Näherung durch die Relativbewegung zweier Teilchen mit Ladung $q_{1,2} = \pm e/\sqrt{\epsilon}$ (ϵ ist die statische Dielektrizitätskonstante des Trägermaterials) und üblicher Coulomb-Wechselwirkung $V(r) = q_1 q_2/r$ beschreiben, wobei die Bewegung nun aber in der Ebene stattfindet. Die reduzierte Masse μ definiert einen effektiven Bohr-Radius $a_B = \epsilon\hbar^2/\mu e^2$.

(a) (6 P) Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für die Wellenfunktion $\Psi(r,\varphi)$ gebundener Zustände im Potential $V(r)$ mit Energien $E = -E_b = -\hbar^2\kappa^2/2\mu$?

Hinweis: Verwende a_B und κ als Parameter und die Darstellung

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$

des Laplace-Operators in Polarkoordinaten r, φ.

(b) (2 P) Welche Werte kann die Quantenzahl m im Separationsansatz $\Psi(r,\varphi) = \Psi(r)\cdot\exp(im\varphi)$ annehmen?

(c) (4 P) Mache für die (nichtnormierte und φ-unabhängige) Wellenfunktion des Grundzustands den Ansatz $\Psi_0(r) = \exp -r/l$ und verifiziere, dass dies für ein geeignetes l tatsächlich eine Lösung ist.

Hinweis: Einsetzen in die Schrödingergleichung legt aus der Identität von rechter und linker Seite für alle r sowohl l als auch die Energie fest.

(d) (2 P) Wie groSS ist die Bindungsenergie des Grundzustands in Einheiten der effektiven Rydberg-Energie $\mathrm{Ry} = \hbar^2/2\mu a_B^2$?