4. Übungsblatt Ferienkurs, Lösungen

September 10, 2012

1. Aufgabe

(a) Mit $\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}z = \mathcal{E}r\cos\theta$ und $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$

$$\delta E_1 = \langle 100 \mid H_1 \mid 100 \rangle = e\mathcal{E} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{(R_{10}^2(r))^2}{4\pi} r\cos\theta \tag{1}$$

$$\propto \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos\theta = 0 \tag{2}$$

(b) Für die Matrixelemente gilt

$$\langle 2l'm' \mid z \mid 2lm \rangle \propto \int d\Omega \underbrace{\cos\theta}_{\text{Parität } -1} \underbrace{Y_{l'm'}^*(\theta,\phi)}_{\text{Parität } (-1)^{l'}} \underbrace{Y_{lm}(\theta,\phi)}_{\text{Parität } (-1)^{l}} \tag{3}$$

Da ein Integral über den gesamten Raumwinkel über eine ungerade Funktion verschwindet, muss gelten $l \neq l'$. Desweiteren gilt für das Integral über φ

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\varphi(m-m')} = 2\pi\delta_{mm'} \tag{4}$$

womit man die Bedingung $m = m'$ erhält. Die beiden nichtverschwindenden Elemente sind also $\langle 210 \mid H_1 \mid 200 \rangle$ und das dazu komplex konjugierte $\langle 200 \mid H_1 \mid 210 \rangle$.

(c)

$$\langle 210 \mid z \mid 200 \rangle = \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta R_{21}^*(r) R_{20}(r) \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{4\pi} r\cos\theta \tag{5}$$

durch ausführen des Integrals über φ und mit der Substitution $\rho = \cos\theta$, $d\rho = -\sin\theta d\theta$, integriert von $\cos 0 = 1$ bis $\cos\pi = -1$

$$= \int_0^\infty dr\, r^2 R_{21}^*(r) R_{20}(r) \frac{\sqrt{3}}{2} r \underbrace{\int_{-1}^1 d\rho\, \rho^2}_{=2/3} \tag{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{6}} \int_0^\infty dr \frac{r^4}{a_B^4}(2 - \frac{r}{a_B}) e^{\frac{r}{a_B}} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}\sqrt{3}\sqrt{6}} \cdot \int_0^\infty a_B ds\, s^4 (2-s) e^{-s} \tag{8}$$

$$= \frac{a_B}{24}(2 \cdot 4! - 5!) \tag{9}$$

$$= -3a_B \tag{10}$$

und damit $\langle 210 \mid H_1 \mid 200 \rangle = -3e\mathcal{E}a_B$

(d) Für den nicht trivialen Teil der Matrix gilt dann

$$H_1' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$det(H_1 - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \alpha^2 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\alpha \tag{13}$$

und für die Eigenvektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Die beiden Eigenzustände lauten somit

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 200\rangle - \mid 210\rangle) \text{ und } \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 200\rangle + \mid 210\rangle) \tag{15}$$