4. Übungsblatt Ferienkurs, Lösungen

September 7, 2012

1. Aufgabe

   (a) Durch Umformen erhält man

$$\hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{1}$$

   Damit lässt sich der Störterm schreiben als

$$H_1 = \alpha\frac{1}{2}m\omega^2(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = C(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \tag{2}$$

   i.

$$\begin{aligned} \langle n \mid H_1 \mid n\rangle &= C(\langle n \mid \hat{a} \mid n\rangle + \langle n \mid \hat{a}^\dagger \mid n\rangle) && (3)\\ &= C(\langle n \mid n-1\rangle + \langle n \mid n+1\rangle) = 0 && (4) \end{aligned}$$

   ii.

$$\begin{aligned} \mid n\rangle^{(1)} &= \sum_{m\neq m} \frac{\langle m \mid H_1 \mid n\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} && (5)\\ &= \frac{C\langle n-1 \mid \hat{a} \mid n\rangle}{E_n - E_{n-1}} + \frac{C\langle n+1 \mid \hat{a}^\dagger \mid n\rangle}{E_n - E_{n+1}} && (6)\\ &= \frac{C}{\hbar\omega}(\sqrt{n} \mid n-1\rangle + \sqrt{n+1} \mid n+1\rangle) && (7) \end{aligned}$$

   (b) Der Potentialterm lässt sich durch quadratische Ergänzung umschreiben:

$$\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + \alpha x) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \tag{8}$$

   Damit ergibt sich mit $\tilde{x} = x + \alpha/2$ ($d\tilde{x} = dx$ und damit $\tilde{p} = p$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2 - \frac{1}{8}m\omega^2\alpha^2 && (9)\\ & && (10) \end{aligned}$$

   Dies ist ein ungestörter harmonischer Oszillator + konstanter Energieterm, es gilt also

$$E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{8}m\omega^2\alpha^2 \tag{11}$$

2. Aufgabe

   (a) (Lösung folgt in Kürze)

3. Aufgabe (Klausur Zwerger 2009)

(a) Für $0 < x < a$ machen wir den Ansatz

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{12}$$

mit k gegeben durch $E = \hbar^2 k^2/2m > 0$. Mit der Bedingung

$$\Psi(0) = A + B = 0 \tag{13}$$

folgt (Normierung spielt zunächst keine Rolle)

$$\Psi(x) = \sin(kx) \tag{14}$$

(b) Die Wellenfunktion links und rechts des δ Potentials ist

$$\Psi_I(x) = \sin(kx) \qquad \Psi'_I(x) = k\cos(kx)(0 < x < a) \tag{15}$$

$$\Psi_{II}(x) = te^{ikx} \qquad \Psi'_{II}(x)ikte^{ikx}(x > a) \tag{16}$$

Die Anschlussbedingungen bei x=a sind die Stetigkeit von $\Psi(x)$,

$$\Psi_I(a) = \Psi_I I(a) \tag{17}$$

$$\sin(kx) = te^{ikx} \tag{18}$$

und andererseits die Sprungebedingung, die aus dem δ-Potential resultiert:

$$\Psi'_{II}(a) - \Psi'_I(a) = \frac{2}{\lambda_0}\Psi(a) \tag{19}$$

$$ikte^{ikx} - k\cos(kx) = \frac{2}{\lambda_0}\sin(ka) \tag{20}$$

Durch Einsetzen von Gleichung 18

$$ik\sin(ka) - k\cos(ka) = \frac{2}{\lambda_0}\Psi(a) \tag{21}$$

$$-ke^{-ika} = \frac{2}{\lambda_0}\Psi(a) \tag{22}$$

Multiplizieren mit a und Substitution $\xi = ka$, $\beta = 2a/\lambda_0$ liefert dann:

$$-\xi e^{i\xi} = \beta\sin(\xi) = \beta\frac{1}{2i}\left(e^{i\xi} - e^{-i\xi}\right). \tag{23}$$

und schließlich durch Multiplikation mit $e^{i\xi}$ das gewünschte Ergebnis

$$1 - e^{2i\xi} = \frac{2i\xi}{\beta}. \tag{24}$$

Es kann keine Lösung mit rein reellem k geben, weil die rechte Seite von 24 dann rein imaginär ist, der Realteil auf der linken Seite aber nur dann verschwindet, wenn auch der Imaginärteil null ist ($\xi \in 2\mathbb{Z}$).

(c) Zunächst verschwindet die recht Seite von Gl. (24) für $\beta \to \infty$, dh in nullter Ordnung gilt

$$\xi_n = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon = 0 \qquad \eta_n = 0 \tag{25}$$

Nach Einsetzen des Ansatzes kann man also die linke Seite von (24) um $\epsilon = 0$ und $\eta = 0$ entwickeln.

$$1 - e^{2i\xi_n} = 1 - e^{2\pi i n} \cdot e^{-2\pi i n\epsilon} \cdot e^{2\eta_n} \tag{26}$$

$$= 1 - [1 - i(2\pi n\epsilon) - \frac{(2\pi n\epsilon)^2}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^3)] \cdot [1 + 2\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2 \tag{27}$$

$$\approx i(2\pi n\epsilon) + \frac{(2\pi n\epsilon)^2}{2} - 2\eta_n. \tag{28}$$

Auf der rechten Seite erhält man

$$\frac{2i\xi_n}{\beta} = i\left[\frac{2\pi n}{\beta} - \frac{2\pi n\epsilon}{\beta}\right] + \frac{2\eta_n}{\beta}. \tag{29}$$

Da $\epsilon = \mathcal{O}(1/\beta)$, lautet der Imaginärteil der Gleichung (24)

$$2\pi n\epsilon = \frac{2\pi n}{\beta} + \mathcal{O}(1/\beta^2), \tag{30}$$

ϵ ist also in erster Ordnung in $1/\beta$

$$\epsilon = \frac{1}{\beta}. \tag{31}$$

Der Realteil von Gl. (24) lautet

$$\frac{(2\pi n\epsilon)^2}{2} - 2\eta_n = \frac{2\eta_n}{\beta} \tag{32}$$

beziehungsweise

$$2\eta_n\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 2(\pi n\epsilon)^2 = 2\left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2. \tag{33}$$

Damit ist η_n in führender (zweiter) Ordnung in $1/\beta$

$$\eta_n = \left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2. \tag{34}$$

(d) Mit

$$\xi_n \approx \pi n\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - i\left(\frac{\pi n}{\beta}\right)^2 \tag{35}$$

folgt

$$E_n = \frac{\hbar^2(\xi_n/a)^2}{2m} = \frac{\hbar^2(\pi n)^2}{2ma^2}\left[\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^2 - i\frac{2\pi n}{\beta^2} + \mathcal{O}(1/\beta^2)\right], \tag{36}$$

dh es gibt einen endlichen Imaginärteil $\Gamma_n = 2\hbar^2(\pi n)^3/(ma^2\beta^2)$. Die Zeitentwicklung spaltet sich auf in einen Phasenfaktor und einen exponentiellen Abfall,

$$e^{-iE_n t/\hbar} = \underbrace{e^{-i\Re E_n t/\hbar}}_{\text{Phase}} \cdot \underbrace{e^{-i\Gamma t/2\hbar}}_{\text{Zerfall}}. \tag{37}$$

Der exponentielle Abfall drückt aus, dass ein Teilchen mit endlicher Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Bereich $0 < x < a$ mit einer Tunnelrate Γ_n durch das δ-Potential nach rechts wegläuft. Die Tunnelrate ist umso größer, je schwächer das Potential ist (β ist ein Maß für die Stärke des Potentials).

Die Tatsache, dass k komplex ist, ist die Folge einer auslaufenden Welle Randbedingung bei $x > a$, die nicht kompatibel ist mit der stehenden Welle bei $0 < x < a$. Dadurch wird die Kontinuitätsgleichung für stationäre Zustände, die in einer Dimension auf $j(x) = const$ führt, explizit verletzt. Ein Hamiltonoperator wird erst mit den konkreten Randbedingungen selbstadjungiert (und hat reelle Eigenwerte), mit einer auslaufenden Welle ist dies nicht der Fall.

4.

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ i - 2i & \end{pmatrix} \tag{38}$$

Eigenwerte sind $\lambda_1 = -(1 + 2i)$ und $\lambda_2 = 0$,

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$