4. Übungsblatt Ferienkurs

September 6, 2012

1. Aufgabe
   Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit einem linearen Störterm
   $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha\frac{1}{2}m\omega^2 x \tag{1}$$
   Die Auf- und Absteigeoperatoren sind gegeben durch
   $$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$
   (a) Betrachte H als gestörten harmonischen Oszillator mit Störparameter α
      i. Berechne die Energiekorrektur 1. Ordnung
      ii. Berechne die Zustandsvektoren $\mid n\rangle^{(1)}$ 1. Ordnung.
      Hinweis: $a \mid n\rangle = \sqrt{n} \mid n-1\rangle$, $a^\dagger \mid n\rangle = \sqrt{n+1} \mid n+1\rangle$)
   (b) Das Problem lässt sich durch Umschreiben von H / Koordinatentransformation auch exakt lösen. Gebe die Energieeigenwerte an.

2. Aufgabe
   Ein H-Atom im homogenen Feld $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}e_z$ werde beschrieben durch den Störoperator
   $$H_1 = -e\Phi = e\vec{r}\cdot\vec{\mathcal{E}} \tag{2}$$
   (a) Berechne die Energieverschiebung für den Grundzustand $\mid 100\rangle$.
   (b) Der Zustand $n = 2$ ist (ohne Spin) vierfach entartet. Welche der Matrixelement $\langle 2lm \mid H_1 \mid 2l'm'\rangle$ verschwinden nicht?
   Hinweis: Die Parität der Kugelflächenfunktionen beträgt $(-1)^l$
   (c) Die Radialfunktionen lauten
   $$R_{21}(r) = \frac{a_B^{-\frac{5}{2}}}{2\sqrt{6}} r e^{-\frac{r}{2a_B}} \qquad \text{und}$$
   $$R_{20}(r) = (2a_B)^{-\frac{3}{2}}(2 - \frac{r}{a_B})e^{\frac{-r}{2a_B}}$$
   Berechne die nicht verschwindenen Matrixelemente.
   (d) Der Störoperator kann nun in Form einer Matrix H_{1ij} geschrieben werden:
   $$H_1 = \begin{pmatrix} \langle 200 \mid H_1 \mid 200\rangle & \langle 200 \mid H_1 \mid 210\rangle & \dots \\ \langle 210 \mid H_1 \mid 200\rangle & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$
   Löse für den nicht trivialen Teil von H_{1ij} die Eigenwertgleichung
   $$H_1 v = Ev \tag{3}$$
   und gebe die resultierenden Eigenenergien an. Wie lauten die Eigenzustände, ausgedrückt durch die Eigenzustände des H-Atoms $\mid nlm\rangle$?

3. Aufgabe
Betrachten Sie ein Teilchen, das sich im Bereich $x > 0$ im Potential

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m\lambda_0}\delta(x-a) \tag{4}$$

bewegt, mit $\lambda_0 > 0$. Für negative x sei $V(x < 0) = \infty$. Das Teilchen befindet sich also in einem unendlich hohen Kasten der Breite a, der aber nach einer Seite durchlässig ist.

(a) Geben Sie die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit Energie $E = \hbar^2k^2/2m > 0$ im Bereich $0 < x < a$ an, die die korrekte Randbedingung für $x = 0$ erfüllt.

(b) Leiten Sie die Gleichung für den zugehörigen Wert von k aus den Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion bei $x = a$ ab unter der Annahme, dass für $x > a$ eine auslaufende ebene Welle te^{ikx} vorliegt. Diese Gleichung kann in der dimensionslosen Variable $\xi = ka$ in der Form

$$1 - \exp 2i\xi = 2i\xi/\beta$$

geschrieben werden, mit $\beta = 2a/\lambda_0$. Gibt es eine Lösung mit rein reellem k?

(c) Machen Sie im Limes $\beta \gg 1$ für die Lösungen den Ansatz (ϵ und η_n seien reell)

$$\xi_n = n\pi(1-\epsilon) - i\eta_n,\; n = 1, 2, \ldots$$

und bestimme ϵ und η_n jeweils in führender Ordnung in $1/\beta$ unter der Annahme, dass $\beta \gg 2\pi n$. *Hinweis:* Zerlegen Sie die transzendente Gleichung in Real- und Imaginärteil und verwenden Sie die Entwicklung $\mathrm{Re}(1 - \exp 2i\xi_n) \approx (2\pi n\epsilon)^2/2 - 2\eta_n$.

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen komplexen Energien $E_n = \mathrm{Re}E_n - i\Gamma_n/2$ und geben Sie mit Hilfe der Zeitentwicklung $\sim \exp -iE_nt/\hbar$ stationärer Zustände eine physikalische Interpretation des Ergebnisses. An welcher Stelle versagt in diesem Beispiel die übliche Argumentation, dass die Energieeigenwerte reell sein müssen?

4. Aufgabe
Der Hamiltonoperator eines Zwei-Niveau-Systems lautet:

$$H = E_0\,(-\mid 1\rangle\langle 1\mid + 2\mid 1\rangle\langle 2\mid + i\mid 2\rangle\langle 1\mid - 2i\mid 2\rangle\langle 2\mid) \tag{5}$$

Dabei sind $\mid 1\rangle$ und $\mid 2\rangle$ orthonormierte Basiszustände. Bestimme die Energieeigenwerte und die zugehörigen Eigenzustände von H.