3. Übungsblatt Ferienkurs: Dreidimensionale Probleme, Lösungen

September 6, 2012

1. Aufgabe

(a)

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2M}+\hat{V}\right)\Psi = E\Psi \tag{1}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r-\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}+K_0^2\right)\frac{\Phi_{lm}}{r}Y_{lm}(\theta,\varphi)=E\frac{\Phi_{lm}}{r}Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{2}$$

Mit $L^2Y_{lm}(\theta,\varphi)=l(l+1)\hbar^2Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r-\frac{l(l+1)\hbar^2}{\hbar^2 r^2}+K_0^2\right)\frac{\Phi_{lm}}{r}Y_{lm}(\theta,\varphi)=E\frac{\Phi_{lm}}{r}Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{3}$$

Da nun nur noch radialsymmetrische Terme und Skalare Vorfaktoren übrig sind, lässt sich Y_{lm} rauskürzen. Für die Ableitungen erhält man

$$\partial_r\left(\frac{\Phi}{r}\right)=\frac{\partial_r\Phi}{r}-\frac{\Phi}{r^2} \tag{4}$$

$$\partial_r^2\left(\frac{\Phi}{r}\right)=\frac{\partial_r^2\Phi}{r}-\frac{\partial_r\Phi}{r^2}-\frac{\partial_r\Phi}{r^2}+\frac{2\Phi}{r^3} \tag{5}$$

Einsetzen ergibt für $r<R$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial_r^2\Phi}{r}-\frac{\partial_r\Phi}{r^2}-\frac{\partial_r\Phi_{lm}}{r^2}+\frac{2\Phi}{r^3}+\frac{2}{r}\left(\frac{\partial_r\Phi}{r}-\frac{\Phi}{r^2}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\frac{\Phi}{r}+K_0^2\right)=E\frac{\Phi}{r} \tag{6}$$

Und durch multiplizieren mit r schlieSSlich

$$\begin{cases}\left(-\partial_r^2+\frac{l(l+1)}{r^2}-K_0^2\right)\Phi_{lm}=-k^2\Phi_{lm} & \text{für } r\le R\\ \left(-\partial_r^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\Phi_{lm}=-k^2\Phi_{lm} & \text{für } r\ge R\end{cases}\qquad k^2=\frac{2ME}{\hbar^2} \tag{7}$$

Es muss gelten $\Phi(0)=0$, da sonst der zweite Term links gegen unendlich geht.

(b) Im Fall $r\le R$

$$(-\partial_r^2-q^2)\Phi(r)=0\qquad q^2=K_0^2-k^2 \tag{8}$$

Wähle $\Phi_i(r)=A\sin(qr)$ (Cosinus Term nicht möglich wegen $\Phi(0)=0$). Für $r>R$ (Freie Bewegung) wähle $\Phi_a(r)=Be^{-kr}$. Die Bedingungen lauten dann

$$\Phi_i(R)=\Phi_a(R)\ \text{(Stetigkeit)} \tag{9}$$

$$\Phi_i'(R)=\Phi_a'(R)\ \text{(Differenzierbarkeit)} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

beziehungsweise

$$A\sin(qR) = Be^{-kR} \tag{12}$$
$$Aq\cos(qR) = -kBe^{-kR} \tag{13}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt

$$Aq\cos(qR) = -kA\sin(qR) \tag{14}$$
$$\tag{15}$$

Womit folgt

$$\cot(qR) = -\frac{k}{q} = -\sqrt{\frac{(K_0R)^2}{(qR)^2} - 1} \tag{16}$$

Diese transzendente Gleichung kann graphisch gelöst werden und liefert die Energien der gebundenen Zustände.

(c) Die guten Quantenzahlen sind nun neben l und m: $s = 1/2$ und $j = l \pm 1/2$ bzw $j = 1/2$ für $l = 0$. Für den Operator $J = L + S$ gilt

$$L \cdot S = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2). \tag{17}$$

Da S, L und J Drehimpuls Operatoren sind, gilt für die Eigenwerte

$$J \mid jlm\rangle = j(j+1)\hbar^2 \mid\rangle \text{ , etc} \tag{18}$$

Damit folgt

$$\langle V_{LS}\rangle = \langle jlms \mid V_{LS} \mid jlms\rangle \tag{19}$$
$$= \langle jlms \mid \alpha\frac{1}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \mid jlm\rangle \text{ , } \alpha = \frac{1}{2M^2c^2}\frac{V_0}{R^2} \text{ .} \tag{20}$$

Mit s=1/2 folgt

$$\Delta E = \langle V_{LS}\rangle = \begin{cases} -\frac{\hbar}{2}\alpha(l+1) & \text{für } j = l - 1/2 \\ \frac{\hbar}{2}\alpha l & \text{für } j = l + 1/2 \end{cases} \tag{21}$$

2. (a)

$$H = -\mu \cdot B = -\mu_B\sigma_z B \tag{22}$$

(b) Es gilt

$$\frac{\hbar}{2}\sigma_x \mid \Psi_0\rangle = +\frac{\hbar}{2} \mid \Psi_0\rangle \tag{23}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{24}$$

woraus sofort folgt: $a = b$. Somit

$$\mid \Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid +\rangle + \mid -\rangle) \tag{25}$$

(c)

$$\mid \Psi_t\rangle = U_t \mid \Psi_0\rangle \tag{26}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \mid \Psi_0\rangle \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega t} \mid +\rangle + e^{-i\omega t} \mid -\rangle) \tag{27}$$

Nach $t = 2\pi/\omega$ befindet sich das System im Ausgangszustand.

(d) Eigenzustand zu $-\hbar/2$

$$| -_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| +_z\rangle - | -_z\rangle) \tag{28}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist dann

$$|\langle -_x \mid \Psi_t\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}(e^{-i\omega t} - e^{-i\omega t})\right|^2 = |i\sin(\omega t)|^2 = \sin^2(\omega t) \tag{29}$$

3. Aufgabe
Für die Vertauschung von zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt allgemein $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} + [\hat{A}, \hat{B}]$.

(a)

$$\begin{aligned}
[L_i, x_j] &= \sum_{k,l} (\epsilon_{ikl} x_k p_l x_j - x_j \epsilon_{ikl} x_k p_l) && (30)\\
&= \sum_{k,l} (\epsilon_{ikl} x_k p_l x_j - \epsilon_{ikl} x_k x_j p_l) && (31)\\
&= \sum_{k,l} (\epsilon_{ikl} x_k p_l x_j - \epsilon_{ikl} x_k (p_l x_j + [x_j, p_l])) && (32)\\
&= \sum_{k,l} \epsilon_{ikl} x_k i\hbar \delta_{lj} && (33)\\
&= \sum_{k} \epsilon_{ikl} x_k i\hbar && (34)
\end{aligned}$$

$$[L_i, x^2] = \sum_{k,l} \left(\epsilon_{ikl} x_k p_l (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\epsilon_{ikl} x_k p_l\right) \tag{35}$$

Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned}
[p_i, x_i^2] f(x_i) &= -i\hbar \partial_x i x_i^2 f(x_i) - f(x_i) - i\hbar \partial_x i && (36)\\
&= -i\hbar 2 x_i f(x_i) && (37)
\end{aligned}$$

also $[p_i, x_i^2] = -2i\hbar x_i$. Damit

$$\begin{aligned}
[L_i, x^2] &= \sum_{k,l} \epsilon_{ikl} x_k 2i\hbar x_l && (38)\\
&= -2i\hbar (x \times x)_i && (39)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
[J_z, A] &= \frac{1}{i\hbar}[[J_x, J_y], A] && (40)\\
&= \frac{1}{i\hbar}([J_x J_y, A] - [J_y J_x, A]) && (41)\\
&= \frac{1}{i\hbar}(J_x[J_y, A] + [J_x, A]J_y - J_y[J_x, A] - [J_y, A]J_x) && (42)\\
&= 0 && (43)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
[\sigma_k, id] = 0 &= [\sigma_k, \sigma_i\sigma_i] && (44)\\
&= \sigma_i[\sigma_k, \sigma_i] + [\sigma_k, \sigma_i]\sigma_i && (45)\\
&= i\hbar(\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i) && (46)
\end{aligned}$$

Also $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0$

4. Aufgabe

(a)

$$\int d^3r\langle\Psi \mid \Psi\rangle = \int d^3r|\Psi_+|^2 + |\Psi_-|^2 \tag{47}$$

$$= \int dr\ r^2 \int \mathrm{d}\omega|\Psi_+|^2 + |\Psi_-|^2 \tag{48}$$

Mit Orthonormiertheit der Y_{lm} folgt:

$$\int \mathrm{d}\Omega|Y_{0,0}(\theta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{1,0}(\theta,\varphi)|^2 = 1 + \frac{1}{3} \tag{49}$$

$$\int \mathrm{d}\Omega|\frac{1}{\sqrt{3}}\left[Y_{1,1}(\theta,\varphi) - Y_{1,0}(\theta,\varphi)\right]|^2 = \frac{1}{3}(1+1) \tag{50}$$

Und damit als Normierungsbedingung

$$\int dr\ r^2|R(r)|^2 \cdot 2 = 1 \tag{51}$$

(b) Die Eigenvektoren zu σ_y lauten

$$|+_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} \qquad |-_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \tag{52}$$

Damit

$$p_+ = \int d^3r|\langle +_y \mid \Psi\rangle|^2 \tag{53}$$

$$= \int d^3r\frac{1}{2}(|\Psi_+|^2 + |i\Psi_-|^2) \tag{54}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{55}$$

Es folgt $p_- = 1 - p_+ = 1/2$.

(c) Die möglichen Messwerte sind 0 und $\hbar$, da nur Eigenfunktionen mit $m = 0, 1$ vorkommen. Für $m = 1, l = 1$ erhält man

$$p_1 = \sum_{s=+,-} |\langle lms \mid \Psi\rangle|^2 \tag{56}$$

$$= \sum_{s=+,-} \left|\int d^3r Y_{11}^* \langle s \mid \Psi\rangle\right|^2 \tag{57}$$

$$= \left|\frac{R(r)r^2}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{1}{6} \tag{58}$$

Damit $p_0 = 1 - p_1 = \frac{5}{6}$