# 3. Übungsblatt Ferienkurs: Dreidimensionale Probleme

September 6, 2012

1. Aufgabe
   Ein Teilchen der Masse $M$ bewegt sich unter dem Einfluss des dreidimensionalen Kastenpotentials
   $$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 = -\frac{\hbar^2 K_0^2}{2M} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$
   Wegen der Rotationsinvarianz des Potentials können die Energieeigenfuntkionen geschrieben werden als: $\Psi(\vec{r}) = \frac{\Phi_{lm}(r)}{r}\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

   (a) Wie lautet die radiale Schrödingergleichung für $\Phi_{lm}(r)$?
   *Hinweis:* Der Laplace Operator in Kugelkoordinaten:
   $$\vec{\nabla}^2 = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{\vec{L}^2}{r^2\hbar^2}$$
   Welche Randbedingung muss für $r \to 0$ gefordert werden?

   (b) Leite mithilfe der Bedingungen der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit der Wellenfunktion die (transzendente) Gleichung für die Energie für $l = 0$ her.

   (c) Das Teilchen habe Spin 1/2. Welche Energieverschiebung wird durch die Spin-Bahn-Kopplung
   $$\hat{V}_{LS} = \frac{1}{2M^2c^2} \frac{V_0}{R^2} \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$$
   für die möglichen Spinzustände jeweils hervorgerufen?

2. Aufgabe
   Ein Teilchen mit Spin $\mathbf{S} = \hbar/2 \cdot \sigma$ befinde sich in einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B} = B \cdot e_z$. Eine Messung der Spinprojektion in $x$-Richtung zur Zeit $t = 0$ soll den Eigenwert $+\hbar/2$ ergeben.

   (a) Wie lautet der Hamiltonoperator der Wechselwirkung des magnetischen Moments mit dem Magnetfeld? (Korrespondenzprinzip!)

   (b) Was ist der Zustand $\mid \Psi_0\rangle$ des Spins zur Zeit $t = 0$ ausgedrückt durch die Eigenzustände $\mid \pm\rangle$ von $\sigma_z$?

   (c) Berechne mithilfe des Zeitentwicklungsoperators $U_t = \exp - i\hat{H}t/\hbar$ den Zustand $\mid \Psi_t\rangle$ zur Zeit $t$. Wann befindet sich der Spin wieder im Ausgangszustand?

   (d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei einer Messung in $x$-Richtung zur Zeit $t$ den Eigenwert $-\hbar/2$?

3. Aufgabe

   (a) Berechne die Kommutatoren $[L_i, x_j]$ und $\left[L_i, x^2\right]$.
   *Hinweis:* Es gilt
   $$L_i = \sum_{k,l} \epsilon_{ikl} x_k p_l$$

Dabei beschreibt $\epsilon_{ikl}$ Levi-Civita Symbol, das folgende Werte annimmt:

$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} 1 & \text{für } i,k,l \text{ gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{für } i,k,l \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{für mindestens zwei gleiche Indizes} \end{cases}$$

(b) Für einen Operator $A$ gelte: $[J_x, A] = [J_y, A] = 0$. Wie lautet $[J_z, A]$?

(c) Drei Operatoren $\sigma_i, i = 1,2,3$ genügen den Kommutatorrelationen $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. Desweiteren gelte $\sigma_i^2 = \text{id}$ (id Identität). Zeige ohne Verwendung einer expliziten Darstellung der $\sigma_i$, dass für den Antikommutator dieser Operatoren gilt:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0 \text{ mit } i \neq j$$

4. Aufgabe
Ein Spin 1/2 Teilchen befinde sich in dem Zustand $\mid \Psi\rangle = \Psi_+(\vec{r}) \mid +\rangle + \Psi_-(\vec{r}) \mid -\rangle$ mit

$$\Psi_+ = R(r)(Y_{0,0}(\theta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1,0}(\theta,\varphi) \ ,$$

$$\Psi_- = \frac{R(r)}{\sqrt{3}} \left[Y_{1,1}(\theta,\varphi) - Y_{1,0}(\theta,\varphi)\right] \ .$$

(a) Wie lautet die Normierungsbedingung für $R(r)$?

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von $S_z$ den Wert $\pm\hbar/2$ zu erhalten? Wie bei einer Messung von $S_y$?

(c) Was sind die möglichen Ergebnisse einer Messung von $L_z$? Wie lauten die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten?