2. Übungsblatt Ferienkurs: Formalismus

Michael Drews

September 4, 2012

1 Ehrenfest-Theorem und Virialsatz

Die Schrödinger Gleichung lautet

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$.

a)

Sei $\hat{Q}$ ein beliebiger Operator. Beweise das Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\rangle$$

Was bedeutet das in Worten?

b)

Verifiziere nun die beiden Vertauschungsrelationen von Ort und Impuls mit dem Hamiltonoperator

$$[\hat{H},\hat{x}] = \frac{-i\hbar p}{m} \qquad\qquad [\hat{H},\hat{p}] = i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}$$

Wende jeweils das Ehrenfest-Theorem an und überprüfe ob in Hinsicht auf Ort und Impuls die klassischen Bewegungsgleichungen als Grenzfall in der Quantenmechanik enthalten ist.

c)

Beweise nun den Virialsatz

$$\frac{d}{dt}\langle xp\rangle = 2\langle T\rangle - \langle x\frac{dV}{dx}\rangle$$

mit der kinetischen Energie T, sodass $H = T + V$.

Was sagt der Virialsatz für den stationären harmonischen Oszillator (für stationäre Zustände)?

2 Harmonischer Oszillator

Ein Teilchen der Masse M bewege sich in einem eindimensionalen harmonischen Potenzial

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{M}{2}\omega^2\hat{x}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\beta^2\hat{p}^2}{\hbar^2} + \frac{\hat{x}^2}{\beta^2}\right)$$

mit $\beta = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}}$.
Der Operator $\hat{b}$ sei definiert durch

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\beta} + i\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}\right)$$

a)

Drücke die Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{H}$ durch $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$ aus.

b)

Verifiziere folgende Vertauschungsrelationen

$$[\hat{H}, \hat{b}] = -\hbar\omega\hat{b} \qquad [\hat{H}, \hat{b}^\dagger] = \hbar\omega\hat{b}^\dagger \qquad [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$$

c)

Sei $|0\rangle$ ein auf Eins normierter Zustand mit der Eigenschaft $\hat{b}|0\rangle = 0$.
Zeige, dass $|0\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$ ist und berechne den Eigenwert E_0.

d)

Sei $|n\rangle = c_n(\hat{b}^\dagger)^n|0\rangle$ mit $c_n \neq 0$ und $n = 0, 1, 2....$
Zeige, dass die Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände von $\hat{H}$ sind und berechne die Eigenwerte E_n.

e)

Zeige, dass es neben E_0 und den E_n keine weiteren Eigenzustände von $\hat{H}$ gibt.

3 Skalar-Produkt und Matrixdarstellung

In einem dreidimensionalen Hilbertraum sind folgende Vektorzustände gegeben:

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle$$
$$|\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

Hierbei sind $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ die orthonormierten Basiszustaände.

a)

Berechne die Skalarprodukte $\langle\alpha|\beta\rangle$ und $\langle\beta|\alpha\rangle$ und zeige dass, $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$.

b)

Finde alle Matrixelemente von $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ gebe die Matrixdarstellung von $\hat{A}$ an.

c)

Ist $\hat{A}$ hermitesch? Begründung?

4 Rabi-Oszillationen

Gegeben sei ein System, in dem nur die zwei linear unabhängige Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ existieren. Der allgemeinste Zustand ist dann eine Linearkombination

$$|\Psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$$

mit $a^2 + b^2 = 1$.
Der Hamiltonoperator dieses Systems laute

$$\hat{H} = h|1\rangle\langle 1| + h|2\rangle\langle 2| + g|1\rangle\langle 2| + g|2\rangle\langle 1|$$

a)

Wie lautet die Matrixdarstellung des Operators $\hat{H}$ in dieser Basis?

b)

Finde die Eigenenergien und zugehörigen (normierten) Eigenzustände des Operators $\hat{H}$.

c)

Die Schrödingergleichung sagt

$$\hat{H}|\Psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle$$

Angenommen das System startet (bei $t = 0$) im Zustand $|1\rangle$. Wie lautet dann der Zustand des Systems zur Zeit t?
(*Möglicher Lösungsweg* : Nutze die Eigenschaft diagonalisierbarer Matrizen: Wenn $A = SDS^{-1}$, dann ist $e^A = Se^D S^{-1}$)

Lösung:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iht/\hbar} \begin{pmatrix} cos(gt/\hbar) \\ -i \cdot sin(gt/\hbar) \end{pmatrix}$$

Dies ist das einfachste Modell für ein Zwei-Niveau-System, das viele Anwendungen findet (darunter z.B. Neutrino-Oszillationen von Elektron-Neutrino zu Myon-Neutrino oder die Oszillationen eines Elektrons zwischen zwei Niveaus des Atomspektrums). Präpariert man das System im Zustand $|1\rangle$ so leibt es für immer dort, zumindest solange das System nicht gestört wird. Eine Störung äußert sich in einer nicht-verschwindenden Nebendiagonale ($g \neq 0$). Liegt die Störung längere Zeit an, so oszilliert die Wahrscheinlichkeit, das System in einem der beiden Zustände zu finden.

5 Hermitesche Operatoren

a)

Gegeben seien die hermiteschen Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$.
Zeige, dass

1. der Operator $\hat{A}\hat{B}$ hermitesch ist, nur, wenn $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ gilt.
2. $(\hat{A} + \hat{B})^n$ hermitesch ist.

b)

Beweise, dass für jeden Operator $\hat{A}$ folgende Operatoren hermitesch sind:

1. $(\hat{A} + \hat{A}^\dagger)$
2. $i(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)$
3. $(\hat{A}\hat{A}^\dagger)$

c)

Zeige, dass der Eigenwert eines hermiteschen Operators reel ist und dass die Eigenfunktionen orthogonal sind.

6 Unschärferelation

Gegeben sei die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Phi|\Phi\rangle \geq |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2$$

a)

Beweise die verallgemeinerte Unschärferelation

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\left\langle[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle\right)^2$$

mit $\sigma_A^2 = \langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle$ und $\sigma_B^2 = \langle(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)^2\rangle$.
Hinweis: Setze

$$|f\rangle = (\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)|\Psi\rangle$$
$$|g\rangle = (\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)|\Psi\rangle$$

b)

Zeige, dass für $\hat{A} = \hat{x}$ und $\hat{B} = \hat{p}$ die Unschärferelation

$$\sigma_x^2\sigma_p^2 \geq \frac{\hbar}{2}$$

gilt.