

# 1. Lösungsblatt Ferienkurs: Eindimensionale Probleme

Michael Drews

September 4, 2012

## 1 Endlicher Potentialtopf

a)

Wir haben innerhalb des Potentialtopfes die Schrödinger-Gleichung:

$$\Psi'' = -\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \Psi$$

was auf den Ansatz

$$\Psi_{in} = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

führt. Mit  $k = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$ .

Außerhalb lautet die Schrödinger-Gleichung

$$\Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi$$

was auf den Ansatz

$$\Psi_{out} = C e^{\kappa x} + D e^{-\kappa x}$$

führt mit  $\kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ .

Der Unterschied zwischen den beiden Schrödinger-Gleichungen ist, dass  $E + V_0 > 0$  ist, während  $E < 0$  ist, der Proportionalitätsfaktor zwischen  $\Psi''$  und  $\Psi$  hat also ein unterschiedliches Vorzeichen. Daher die unterschiedlichen Ansätze und die unterschiedliche Physik in den beiden Bereichen (Schwingung vs. exponentieller Abfall).

Nun nutzen wir die Symmetrie aus:  $\Psi(x) = \Psi(-x)$  und betrachten nur eine Hälfte der x-Achse (üblicherweise die rechte).

Also haben wir

$$\begin{aligned} \Psi_{in} &= A \sin(kx) + B \cos(kx) & , x < a \\ \Psi_{out} &= D e^{-\kappa x} & , x > a \end{aligned}$$

Es muss  $C = 0$  sein, damit die Wellenfunktion nicht bei  $\infty$  divergiert.

Betrachte nun nur gerade Wellenfunktionen, d.h. wir nehmen nur den  $\cos$ -Anteil der Wellenfunktion im Innern des Topfes.

Dann liefert Stetigkeit und Stetigkeit der Ableitung

$$\begin{aligned} B \cos(ka) &= D e^{-\kappa a} \\ B k (-\sin(ka)) &= -\kappa D e^{-\kappa a} \end{aligned}$$

Also ist

$$B k (-\sin(ka)) = -\kappa \cdot B \cos(ka) \rightarrow \frac{\sin(ka)}{\cos(ka)} = \tan(ka) = \frac{\kappa}{k}$$

Setze nun  $z = ka$ . Dann muss (um die angegebene Gleichung zu erhalten) gelten

$$\sqrt{\left(\frac{z_0}{ka}\right)^2 - 1} = \frac{\kappa}{k}$$

Dies führt zu:  $z_0 = \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mV_0}$ . Also

$$\tan(z) = \sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1}$$

Genauso erhält man für die *ungeraden* Lösungen:

$$-\cot(z) = \sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1}$$

(Hier nimmt man nur den *sin*-Anteil der Wellenfunktion im Inneren, was zu  $\frac{\cos}{\sin} = \cot$  führt und bei der Ableitung ein Minus weniger einführt, das dann hier in der Zielgleichung übrigbleibt.)

**b)**

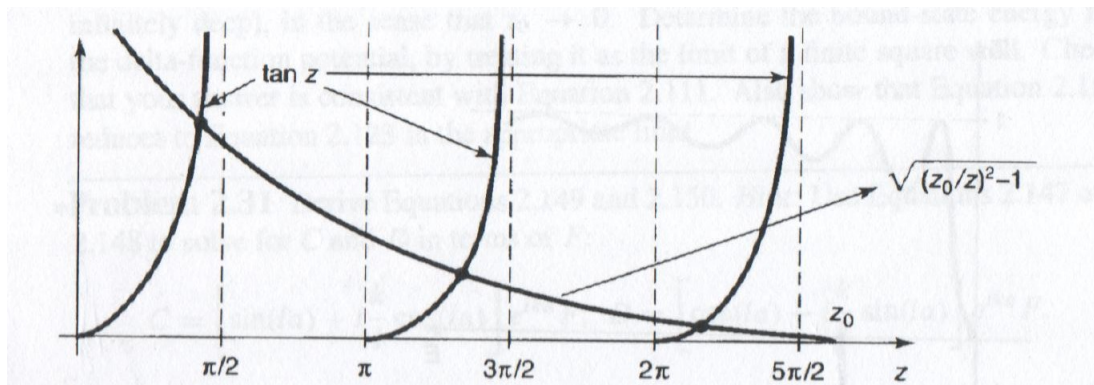
Man hat nun zwei Funktionen auf beiden Seiten der vorherigen Gleichungen, und sucht deren Schnittpunkte entlang der  $z$ -Achse. Dies gibt diskrete Werte  $z_n$ , die sich über  $z = ka$  wiederum mit diskreten Wellenvektoren  $k_n$  verknüpfen lassen, die sich über die Dispersionrelation wiederum mit diskreten Energien  $E_n$  verknüpfen lassen.

Finden der Schnittpunkte liefert uns also die erlaubten Eigenenergiewerte der gebundenen Zustände. Betrachte die Gleichung

$$\tan(z) = \sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1}$$

Auf der einen Seite der Tangens, auf der anderen Seite eine Funktion, die sehr ähnlich zu  $\frac{1}{z}$  sein muss, aber mit der Besonderheit, dass sie die  $z$ -Achse bei  $z_0$  schneidet:  $\sqrt{\left(\frac{z_0}{z_0}\right)^2 - 1} = 0$ .

Graphisch ergibt sich folgendes Bild:



Die  $-\cot$ -Funktion von den ungeraden Funktionen sieht quasi wie die um  $\pi/2$  verschobene  $\tan$ -Funktion aus, sodass man in regelmäßigem Abstand von  $\pi/2$  dies  $\tan$ -förmigen Äste hat. Man stelle sich nun vor man habe einen sehr großen oder breiten Topf, also  $aV_0 \gg 1$ .

Dann ist automatisch  $z_0 \gg 1$ .  $z_0$  wandert also sehr weit nach rechts, was bewirkt, dass die Funktion  $\sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1}$  gerade für kleine  $z$  sehr groß wird.

Die Schnittpunkte der Funktion mit den  $\tan$ - bzw.  $-\cot$ -Ästen sind also in regelmäßigem Abstand bei  $z_n = n\frac{\pi}{2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Damit gilt

$$k_n = z_n/a = \frac{n\pi}{2a} = \frac{\sqrt{2m(E_n + V_0)}}{\hbar}$$

Umstellen liefert

$$E_n + V_0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$$

Die Energie über dem Boden des Potentialtopfes  $E - V(x) = E + V_0$  ist also gegeben durch die gleiche Formel wie beim unendlichen Potentialtopf. Dies ist konsistent, da wir ja einen sehr großen Potential betrachtet haben.

c)

Da  $z_0 > 0$  ist, muss es immer einen Schnittpunkt mit zumindest dem ersten *tan*-Ast geben. Es existiert also immer ein Grundzustand.

Die Bedingung, dass mindestens  $N$  Zustände existieren können lautet

$$z_0 > \frac{(N-1)\pi}{2}$$

Also

$$V_0 a^2 > \frac{(N-1)\pi \hbar^2}{m}$$

## 2 Delta-Potential

a)

Die Schrödinger Gleichung lautet

$$\Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi$$

wobei  $E < 0$ , wenn wir den Bindungszustand suchen. Der Lösungsansatz ist also

$$\Psi = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

mit  $k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ .

Die Stetigkeit liefert

$$A = B$$

Also haben wir eine symmetrische Wellenfunktion.

Die Stetigkeit der Ableitung können wir hier nicht fordern, da das Potential am Punkt  $x = 0$  unendlich groß wird.

Stattdessen integriert man die gesamte Schrödingergleichung über ein kleines Intervall  $[-\epsilon, \epsilon]$ , um eine Sprungbedingung herzuleiten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V(x) \Psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Psi(x) dx$$

Der letzte Term wird im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  gleich Null, da  $\Psi$  nur endlich groß ist.

Im zweiten Term kommt die  $\delta$ -Funktion zum tragen und das Integral entspricht dem Integranden ausgewertet am Punkt  $x = 0$ .

Im ersten Term integrieren wir die zweite Ableitung. Die Stammfunktion der zweiten Ableitung ist die erste Ableitung. Wir müssen diese also nur an den Integrationsgrenzen auswerten.

Dies alles führt also zu:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{d\Psi}{dx} \right]_{-\epsilon}^{\epsilon} - \alpha \Psi(0) &= 0 \\ \left( \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{\epsilon} - \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{-\epsilon} \right) &= -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \Psi(0) \\ \Delta \left( \frac{d\Psi}{dx} \right) &= -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot \Psi(0) \end{aligned}$$

Mit der Zeichenkonvention  $\Delta$  als Differenz.  
Angewendet auf unsere Wellenfunktion ergibt dies:

$$[Bk - (-Bk)] = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}B$$

$$k = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

Die Energie des Bindungszustand ergibt sich also als

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

**b)**

Für die Streuzustände setze  $E > 0$ . Dann ist der Lösungsansatz für die Schrödinger-Gleichung

$$\Psi = A^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\Psi = C^{ikx} + De^{-ikx}$$

mit  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ .

Davon ausgehend, dass wir im Streuexperiment auf der rechten Seite keine linkslaufende Welle haben ( $D = 0$ ) und der genaue Wert der Einfallsamplitude  $A$  nicht interessant und daher auf Eins gesetzt werden kann, können wir dies so formulieren:

$$\Psi = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

$$\Psi = Te^{ikx}$$

Stetigkeit und Sprungbedingung bei  $x = 0$  liefern:

$$1 + R = T$$

$$ik(T - 1 + R) = \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2}(1 + R)$$

Oder auch

$$T = 1 + 2i\beta - R(1 - 2i\beta)$$

mit  $\beta = \frac{m\alpha^2}{k\hbar^2}$ .  
Auflösen liefert

$$R = \frac{i\beta}{1 - i\beta}$$

$$T = \frac{1}{1 - i\beta}$$

Damit sind der Reflexions- und Transmissionskoeffizient:

$$|R|^2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} = \frac{1}{1 + \frac{\hbar^4 k^2}{m^2 \alpha^2}}$$

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + \beta^2} = \frac{1}{1 + \frac{m^2 \alpha^2}{\hbar^4 k^2}}$$

### 3 Freies bewegtes Teilchen

**a)**

Für das erste Integral, definiere:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Also ist

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-x^2-y^2} = \\ = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dr r e^{-r^2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dr r e^{-r^2} = 2\pi \left[ \frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

Daher folgt

$$I = \sqrt{\pi}$$

Das nächste Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

Lösen wir durch partielles Integrieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{-1}{2} e^{-x^2} \right) dx = \left[ x \cdot \frac{-1}{2} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{2} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$$

**b)**

Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\alpha x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = A^2 \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{\pi} = 1$$

Woraus folgt

$$A = \left( \frac{2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}}$$

**c)**

$$\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2} e^{ilx} e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx)} dx$$

mit

$$a = \alpha \\ b = i(k-l)$$

Setze

$$y = \sqrt{a}[x + b/2a]$$

Also ist

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a} \rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{a}} dy$$

Also

$$\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-b^2/4a} \cdot \sqrt{\pi} \Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( \frac{2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(k-l)^2}{4\alpha}}$$

Damit berechnet sich  $\Psi(x, t)$  zu

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( \frac{2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(k-l)^2}{4\alpha}} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( \frac{2\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(k^2 - 2kl + l^2)}{4\alpha}} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk$$

Mit  $a = \frac{1}{4\alpha} + i\frac{\hbar t}{2m}$  und  $b = \frac{-2l}{4\alpha} - ix$  wird daraus

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{l^2}{4\alpha^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk)} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{l^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk)} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{l^2}{4\alpha^2}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\pi} \\ &= \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha} + i\frac{\hbar t}{2m}}} \cdot e^{-\frac{l^2}{4\alpha^2}} e^{(\frac{1}{2\alpha} + ix)^2 \cdot a / (1 + 2i\hbar\alpha t/m)}\end{aligned}$$

Also

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2i\hbar\alpha t/m}} \cdot e^{-\frac{l^2}{4\alpha^2}} \cdot e^{a \cdot (\frac{1}{2\alpha} + ix)^2 / (1 + 2i\hbar\alpha t/m)}$$

d)

Für  $\langle x \rangle$  können wir die Angabe von  $|\Psi|^2$  gut gebrauchen:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} w e^{-2w^2(x - \frac{\theta l}{2\alpha})} dx$$

Setze  $u = x - \frac{\theta l}{2\alpha}$ . Also ist  $du = dx$ .

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} w \left(u + \frac{\theta l}{2\alpha}\right) \cdot w e^{-2w^2 u^2} du = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} w \left( \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-2w^2 u^2} du + \frac{\theta l}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2w^2 u^2} du \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} w \left( 0 + \frac{\theta l}{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}w} \sqrt{\pi} \right) \\ &= \frac{\theta l}{2\alpha} = \frac{\hbar l}{m} t = v \cdot t\end{aligned}$$

mit der Geschwindigkeit  $\frac{\hbar l}{m}$ .

Die Erwartungswerte von Observablen verhalten sich nach der klassischen Physik. Daher gilt

$$\langle p \rangle = m \cdot v = m \cdot \frac{\hbar l}{m} = \hbar l$$

(Logisch, da der Wellenvektor  $k = l$  ist und der Impuls  $p = \hbar k$  ist.)

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} w e^{-2w^2(x - \frac{\theta l}{2\alpha})} dx$$

Setze  $u = x - \frac{\theta l}{2\alpha}$ . Also ist  $du = dx$ .

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} w \int_{-\infty}^{\infty} \left( u^2 + \frac{\theta l}{\alpha} u + \frac{\theta^2 l^2}{4\alpha^2} \right) \cdot e^{-2w^2 u^2} du = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} w \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-2w^2 u^2} du + 0 + \frac{\theta^2 l^2}{4\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2w^2 u^2} du \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} w \cdot \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\sqrt{2}w)^3} + \frac{\theta^2 l^2}{4\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{2}w} \sqrt{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{4w^2} + \frac{\theta^2 l^2}{4\alpha^2} = \frac{1}{4w^2} + (vt)^2 \end{aligned}$$

Für  $\langle p^2 \rangle$  müssten wir wieder mit der einfachen Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  arbeiten, denn  $\hat{p} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t)^* \frac{d}{dx} \Psi(x, t) = \dots$$

Dies führt auf eine extrem komplizierte Rechnung, die man von Hand nicht fehlerfrei machen kann. (In der ersten Version hatte ein Denkfehler die Aufgabe vereinfacht, daher steht sie in der Aufgabenstellung). Daher ist die Berechnung dieses Erwartungswerts nicht möglich...

## 4 Tunneleffekt

a)

$$T = \exp\left(-\frac{2\delta x}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

b)

Damit kann man sagen:

$$\begin{aligned} T &= \prod_i \exp\left(-\frac{2\delta x}{\hbar} \sqrt{2m(V(x_i) - E)}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sum_i \delta x \sqrt{2m(V(x_i) - E)}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(V(x) - E)}\right) \end{aligned}$$

wenn man  $\delta x \rightarrow 0$  gehen lässt wird die Summe zum Integral.

$x_1$  und  $x_2$  sind die klassischen Umkehrpunkte, also die Punkte, an denen das Potential genau  $E$  beträgt.

c)

Das Teilchen befindet sich im Kern also ist  $x_1 = 0$ .

Der Punkt  $x_2$  an dem das Potential genau  $E$  beträgt ist durch

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi E}$$

gegeben.

Daher erhält man

$$\int_0^b \sqrt{2m(V(x) - E)} dx = \sqrt{2mE} \int_0^b \sqrt{\frac{b}{x} - 1}$$

Substituiere nun  $r = b^2 \sin^2 \theta$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \sqrt{2mE} \int_0^b \sqrt{\frac{b}{x}} - 1 &= \sqrt{2mE} \int_0^b b \cdot 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = \\ &= \frac{b\pi}{2} \sqrt{2mE} \end{aligned}$$

Also ist

$$T = \exp\left(-\frac{b\pi}{\hbar} \sqrt{2mE}\right)$$