Probeklausur

Aufgabe 1: Ein Stern der Masse m nahe dem galaktischen Zentrum der Milchstraße bewegt sich auf einer geschlossenen Bahn um ein Objekt im Zentrum. Wir nehmen an, dass dabei ein Gravitationspotential der Form

$$U(r) = -G\frac{mM_{\mathrm{MBH}}}{r} = -\frac{k}{r}$$

wirkt, wobei $M_{\mathrm{MBH}} \gg m$ die Masse des Zentralkörpers ist.

a) Geben Sie die Erhaltungsgrößen bei dieser Bewegung an. Drücken Sie diese explizit in ebenen Polarkoordinaten aus. Warum verläuft die Bewegung in einer Ebene?

b) Beweisen Sie ausgehend von den Bewegungsgleichungen, dass der Drehimpuls bei dieser Bewegung erhalten ist.

c) Beweisen Sie, dass auch die Energie eine Erhaltungsgröße ist.
Hinweis: Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichungen mit $\dot{\vec{r}}$.

d) Zeigen Sie unter der Ausnutzung der Erhaltungsgrößen, dass gilt

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{l}{\rho^2\sqrt{2\mu\left(E + \frac{k}{\rho}\right) - \frac{l^2}{\rho^2}}}\,\mathrm{d}\rho\,.$$

Hinweis: Bestimmen Sie für eine Parametrisierung der Bahnkurve $r(\varphi)$ die totale Ableitung nach der Zeit,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(\varphi) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}$$

und trennen Sie die Variablen r und φ, nachdem Sie die Drehimpulserhaltung ausgenutzt haben.

e) Führen Sie die Integration aus, um die Parametrisierung $r(\varphi)$ der Bahnkurve zu erhalten und zeigen Sie, dass

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)}\,.$$

Bestimmen Sie die dabei auftretenden Konstanten p und ϵ, und zeigen Sie, dass der Bahnparameter p und die Exzentrizität ϵ gegeben sind durch

$$p = \frac{l^2}{k\mu}\,, \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}\,.$$

Hinweise: Substituieren Sie im Integral $x = 1/\rho$. Nützlich ist hier das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - (x-b)^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x-b}{a} \, .$$

f) Leiten Sie das zweite Kepler'sche Gesetz her: Zeigen Sie, dass der Radiusvektor vom Zentralkörper zum umlaufenden Stern in gleichen Zeitintervallen Δt gleiche Flächen ΔA durchläuft. Geben Sie an, durch welche physikalischen Größen die Änderungsrate $\Delta A/\Delta t$ bestimmt wird! Berechnen Sie die Umlaufzeit T durch Integration über eine volle Periode!

Hinweise: Der Flächeninhalt eines durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks ist $A_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}\,|$. Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist $A = \pi ab$. Die Halbachsen können mit Hilfe der Bahnparameter bestimmt werden zu

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2} \, , \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \, .$$

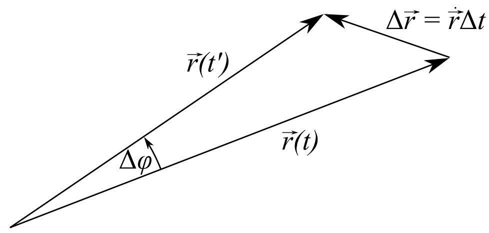


Abb. 1: Radiusvektor $\vec{r}(t)$ zu den Zeiten t und $t' = t + \Delta t$.

g) Beweisen Sie das dritte Kepler'sche Gesetz: Zeigen Sie, dass für das Verhältnis des Quadrats der Umlaufzeit T zum Kubus der großen Halbachse a der geschlossenen Bahn gilt

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_{\mathrm{MBH}}}{4\pi^2} \, .$$

Entwickeln Sie dabei die reduzierte Masse μ für den gegebenen Fall $m \ll M_{\mathrm{MBH}}$ in der kleinen Größe m/M_{MBH}. Was ist der führende Term? Wie hängt das Ergebnis von der Masse des den Zentralkörper umkreisenden Sterns ab?

h) Nach langandauernden Beobachtungen ist es Astronomen am MPI in Garching gelungen, die Bahn des Sterns S2 mit einer Umlaufdauer von 15 Jahren um das galaktische Zentrum genau zu vermessen. Unter Berücksichtigung der Entfernung zum galaktischen Zentrum lässt sich aus den Messungen schließen, dass die große Halbachse seiner Bahn eine Ausdehnung von etwa $a \simeq 1.5 \times 10^{14}$ m hat. Schätzen Sie damit die Masse des Zentralkörpers im galaktischen Zentrum ab! Zum Vergleich: Die Masse der Sonne ist etwa $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg. Um welche Art von Objekt dürfte es sich in Anbetracht der von Ihnen berechneten Masse handeln?

Hinweis: $G/(4\pi^2) \simeq 1.7 \times 10^{12}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$.

LÖSUNG:

a) Die Erhaltungsgrößen sind die Energie $E = T + U$ und der Drehimpuls $\vec{l}$. Die Separation der Schwerpunktsbewegung erfordert die reduzierte Masse

$$\mu = \frac{mM_{\text{MBH}}}{m + M_{\text{MBH}}} .$$

$\vec{r}$ ist der Ortsvektor der Relativbewegung ($\vec{r} = r\vec{e}_r$ in Polarkoordinaten). Die kinetische Energie lautet damit in Polarkoordinaten

$$T = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

Und somit ist die Gesamtenergie ausgedrückt in Polarkoordinaten

$$E = T + U = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k}{r} .$$

Der Bahndrehimpuls lautet in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{l} &= \vec{r} \times \vec{p} = r\vec{e}_r \times \mu\dot{\vec{r}} = r\vec{e}_r \times (\mu\dot{r}\vec{e}_r + \mu r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= \mu r\dot{r}\underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_r)}_{=0} + \mu r^2\dot{\varphi}\underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi)}_{=\vec{e}_z} = \mu r^2\dot{\varphi}\vec{e}_z . \end{aligned}$$

Die Bewegung läuft aufgrund der Drehimpulserhaltung immer in einer Ebene senkrecht zu $\vec{e}_z$ ab ($\vec{r} \perp \vec{e}_z$ und $\dot{\vec{r}} \perp \vec{e}_z$, also bewegt sich die Masse μ nie aus der Ebene heraus, auf der der Drehimpuls senkrecht steht).

b) Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\nabla U(r) = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{k}{r^3}\vec{r}.$$

Damit folgt

$$\dot{\vec{l}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu\Big(\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\Big) = \vec{r} \times \mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{r^3}\underbrace{(\vec{r} \times \vec{r})}_{=0} = 0 .$$

c) Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\dot{\vec{r}}$ liefert

$$\begin{aligned} & \mu\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}} \cdot \nabla U(r) \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-U(r)) \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r)\right) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass für die totale Zeitableitung des Potentials gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(r) = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \dot{\vec{r}} \cdot \nabla U(r)\,.$$

d) Aus dem erhaltenen Drehimpuls folgt

$$l = |\vec{l}| = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \implies \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}\,.$$

Aus dem Hinweis erhalten wir nun

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(\varphi) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{l}{\mu r^2} \implies \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{l}{\mu r^2}\,.$$

Andererseits folgt aus der Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} - \frac{k}{r}\,.$$

Aufgelöst nach $\dot{r}$ ergibt das

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}\,.$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $\dot{r}$ liefert

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{l}{\mu r^2} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}\,.$$

Trennung der Variablen ergibt dann

$$\mathrm{d}\varphi = \pm\frac{\frac{l}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}}\,\mathrm{d}r = \pm\frac{l}{r^2\sqrt{2\mu\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{r^2}}}\,\mathrm{d}r$$

und nach Integration erhält man

$$\varphi - \varphi_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{l}{\rho^2\sqrt{2\mu\left(E + \frac{k}{\rho}\right) - \frac{l^2}{\rho^2}}}\,\mathrm{d}\rho$$

mit $r_0 = r(\varphi_0)$.

e) Mit der Substitution $x = \frac{1}{\rho}$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$ wird da Integral zu

$$
\begin{aligned}
\varphi - \varphi_0 &= -\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{l}{\sqrt{2\mu E + 2\mu k x - l^2 x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + 2\frac{\mu k}{l^2} x - x^2}} \\
&= -\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 - \left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 + 2\frac{\mu k}{l^2} x - x^2}} \\
&= -\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\right) - \left(x - \frac{\mu k}{l^2}\right)^2}} \\
&= \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a/p)^2 - (x - 1/p)^2}} \\
&= \left[\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{x - 1/p}{a/p}\right]_{1/r}^{1/r_0} \\
&= \underbrace{-\arccos\frac{1/r_0 - 1/p}{a/p}}_{=\text{const.}} + \arccos\frac{p/r - 1}{a}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \varphi - \underbrace{\left[\varphi_0 - \arccos\frac{p/r_0 - 1}{a}\right]}_{=:\tilde{\varphi}_0} = \arccos\frac{p/r - 1}{a}
$$

wobei wir in der dritten Zeile quadratisch ergänzt haben

$$
ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) .
$$

Auflösen nach r liefert

$$
\epsilon\cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0) = \frac{p}{r} - 1 \implies r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)}
$$

mit

$$
p = \frac{l^2}{\mu k}\,, \qquad a^2 = 1 + \frac{2El^2}{\mu k^2} \implies \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} .
$$

f) Für die Fläche des Dreiecks, das von $\vec{r}(t)$ zwischen den Zeiten t und $t' = t + \Delta t$ überstrichen wird gilt

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \vec{r}(t')| = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \Delta\vec{r}(t)| \\ &= \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\Delta t| = \frac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)|\Delta t\,.\end{aligned}$$

Erinnerung: $\vec{l} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \implies l/\mu = |\vec{l}|/\mu = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$. Also gilt

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{l}{2\mu}\,.$$

Die Änderungsrate wird durch den Betrag des Drehimpulses (und der reduzierten Masse) bestimmt. Differentiell: $\mathrm{d}A/\,\mathrm{d}t = l/(2\mu)$.
Integration über eine volle Periode liefert

$$\int_0^T \mathrm{d}A = \int_0^T \frac{l}{2\mu}\,\mathrm{d}t = \frac{l}{2\mu}T = \pi ab = \pi\frac{p}{1-\epsilon^2}\frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \pi\frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}\,.$$

Mit Definitionen von p und ϵ folgt

$$A = \pi ab = \pi\frac{k}{2E}\frac{l}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{l}{2\mu}T \implies T = \pi\frac{k\mu}{\sqrt{2\mu E^3}}\,.$$

g) Mit den nun, in physikalischen Größen ausgedrückten, berechneten a und T erhält man für das dritte Kepler'sche Gesetz

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{T^2} &= \frac{k^3}{(2E)^3}\frac{2\mu E^3}{(\pi k\mu)^2} = \frac{k}{4\pi^2}\frac{1}{\mu} = \frac{GmM_{\text{MBH}}}{4\pi^2}\frac{m + M_{\text{MBH}}}{mM_{\text{MBH}}} = \\ &= \frac{G}{4\pi^2}(M_{\text{MBH}} + m) = \frac{G}{4\pi^2}M_{\text{MBH}}\left(1 + \frac{m}{M_{\text{MBH}}}\right) \simeq \frac{G}{4\pi^2}M_{\text{MBH}}\,.\end{aligned}$$

In dieser Näherung ist das Ergebnis unabhängig von der Masse m des den Zentralkörper umkreisenden Sterns.

h) Damit ergibt sich nun für die Masse des Zentralkörpers unter Verwendung der angegebenen Werte

$$M_{\text{MBH}} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2} \simeq 4.3 \times 10^6 M_\odot\,.$$

Das Objekt im galaktischen Zentrum der Milchstraße hat demnach aufgrund der Bahnmessung vom Stern S2 eine Masse von etwas mehr als 4 Millionen Sonnenmassen. Es dürfte sich daher um ein sehr massives schwarzes Loch (MBH = Massive Black Hole) handeln.

Aufgabe 2: Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im dreidimensionalen Raum im Potential $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ mit $r = |\vec{r}|$. Der zeitliche Erwartungswert einer Funktion $f(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$ der Ortskoordinate $\vec{r}(t)$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ ist definiert als

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))\, \mathrm{d}t\,.$$

a) Formulieren Sie die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten für das angegebene Potential.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

c) Zeigen Sie für das angegebene Potential, dass mit der durch das Potential erzeugten Kraft $\vec{F}$ gilt:

$$\left\langle 2T + \vec{F} \cdot \vec{r} \right\rangle = 0\,.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie weit sich das Teilchen vom Koordinatenursprung entfernen kann, um was für eine Bewegung es sich handelt, und was daraus für die Erwartungswerte folgt.

d) Zeigen Sie dann, dass gilt:

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{r}{2} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \right\rangle$$

und leiten Sie daraus eine Beziehung zwischen $\langle T \rangle$ und $\langle U \rangle$ ab.

Hinweis: Sie brauchen nicht zu beweisen, dass $\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$ gilt.

e) Bestimmen Sie aus der Lagrange-Funktion die zugehörige Hamilton-Funktion.

f) Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf und zeigen Sie, dass diese zu den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen äquivalent sind.

Hinweis: Am schnellsten lässt sich das zeigen, wenn sie kartesische Koordinaten verwenden.

g) In welcher Beziehung steht der Erwartungswert der Hamilton-Funktion $\langle \mathcal{H} \rangle$ zu den Erwartungswerten der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ und der potentiellen Energie $\langle U \rangle$? Drücken Sie $\langle T \rangle$ und $\langle U \rangle$ durch $\langle \mathcal{H} \rangle$ aus. Welche physikalische Größe wird durch $\mathcal{H}$ beschrieben?

LÖSUNG:

a) Für die kinetische T und potentielle Energie U gilt

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\,, \qquad U = \frac{1}{2}kr^2$$

und damit lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)\,.$$

b) Aus der Euler-Lagrange-Gleichung in vektorieller Form folgt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r}$$

oder in Komponenten

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \\ m\ddot{y} + ky &= 0 \\ m\ddot{z} + kz &= 0 \end{aligned}$$

c) Wir gehen von der vektoriellen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = 0$$

aus und multiplizieren diese mit $\vec{r}$:

$$m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + k\vec{r}\cdot\vec{r} = 0\,.$$

Nun müssen wir $m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r}$ als eine totale Zeitableitung schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right) &= m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + m\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} \\ &= m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + 2\cdot\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \\ &= m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + 2T \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right) - 2T$$

Nun bilden wir den zeitlichen Erwartungswert:

$$0 = \left\langle m\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + k\vec{r}\cdot\vec{r}\right\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right) - 2T - (-k\vec{r}\cdot\vec{r})\right\rangle$$

$$\implies \langle 2T + (-k\vec{r}) \cdot \vec{r} \rangle = \left\langle 2T + \vec{F} \cdot \vec{r} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right) \right\rangle$$

Jetzt benötigen wir die explizite Definition des zeitlichen Erwartungswertes, um den letzten Term abzuschätzen:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right) \mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left[m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right]_0^\tau .$$

Eine Bewegung im Oszillatorpotential ist räumlich beschränkt:

$$|\vec{r}| < R_{\max} < \infty$$

und auch die Geschwindigkeits ist beschränkt:

$$|\dot{\vec{r}}| < V_{\max} < \infty$$

und damit ist

$$\left| \left[m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right]_0^\tau \right| < 2mR_{\max}V_{\max} < \infty$$

und daher

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \left| \left[m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right]_0^\tau \right| < \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} 2mR_{\max}V_{\max} = 0 .$$

Für eine gebundene Bewegung gilt also

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right) \right\rangle = 0 .$$

Damit erhalten wir letztendlich

$$\left\langle 2T + \vec{F} \cdot \vec{r} \right\rangle = \langle 2T + (-k\vec{r} \cdot \vec{r}) \rangle = 0 .$$

d) Es gilt nun

$$\langle 2T + (-k\vec{r} \cdot \vec{r}) \rangle = 0$$

und daher

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{1}{2} k\vec{r} \cdot \vec{r} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} kr^2 \right\rangle = \left\langle \frac{r}{2} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

e) Die Hamilton-Funktion ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(q,p) = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q,p)$$

mit den kanonisch konjugierten Impulsen

$$\begin{aligned}
p_1 = p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} &\implies \dot{x} = \frac{p_x}{m} \\
p_2 = p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} &\implies \dot{y} = \frac{p_y}{m} \\
p_3 = p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} &\implies \dot{z} = \frac{p_z}{m}
\end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion lautet damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(q,p) &= \frac{1}{m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{m}\right)^2 \left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right] + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \\
&= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \\
&= \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}k\vec{r}^2 = \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r})\,.
\end{aligned}$$

f) Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ergeben sich aus den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} & \dot{p}_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx \\
\dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} & \dot{p}_y &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -ky \\
\dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} & \dot{p}_z &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -kz
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\dot{p}_i = m\ddot{x}_i = -kx_i$$

und dies stimmt mit den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen überein.

g) Da keine Zwangsbedingungen und ein geschwindigkeitsunabhängiges Potential vorliegen gilt

$$\mathcal{H} = T + U = E$$

also

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \langle T \rangle + \langle U \rangle = \langle E \rangle$$

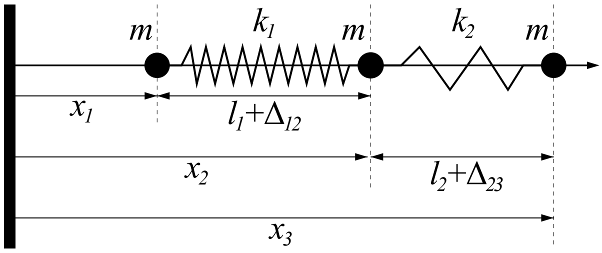
und mit $\langle T \rangle = \langle U \rangle$ aus d)

$$\langle \mathcal{H} \rangle = 2\langle T \rangle = 2\langle U \rangle$$

bzw.

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2}\langle \mathcal{H} \rangle\,, \qquad \langle U \rangle = \frac{1}{2}\langle \mathcal{H} \rangle$$

Aufgabe 3: Drei gleiche Massenpunkte der Masse m, die sich nur entlang der x-Achse bewegen können, sind durch zwei Federn mit der Federkonstanten k_1 und k_2 und den Ruhelängen l_1 und l_2 miteinander verbunden (s. Abb.). Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System auf. Verwenden Sie dabei als generalisierte Koordinaten

$$q_1 = x_1\,, \qquad q_2 = x_2 - l_1\,, \qquad q_3 = x_3 - l_2 - l_1\,.$$

b) Bestimmen Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen des Systems.

c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

d) Bestimmen Sie die Eigenschwingung zur Eigenfrequenz $\omega = 0$. Welcher Bewegung entspricht das? Was ist die zugehörigen Erhaltungsgröße und aus welcher Symmetrie des Systems folgt sie?

e) Bestimmen Sie nun die beiden anderen Eigenschwingungen im Fall $k_1 = k_2 =: k$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

a) Aus der Wahl der generalisierten Koordinaten folgt $\dot{q}_i = \dot{x}_i$ für $i = 1, 2, 3$. Die kinetische Energie ist somit gegeben durch

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)\,.$$

Die einzelnen Spannenergien lauten

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1 - l_1)^2 = \frac{1}{2}k_1\Delta_{12}^2 = \frac{1}{2}k_1(q_2 - q_1)^2 \\ U_2 &= \frac{1}{2}k_2(x_3 - x_2 - l_2)^2 = \frac{1}{2}k_2\Delta_{23}^2 = \frac{1}{2}k_2(q_3 - q_2)^2 \end{aligned}$$

Die potentielle Energie ist somit gegeben durch

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}k_1(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_3 - q_2)^2\,.$$

Die Lagrange-Funktion lautet damit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}}) &= T-U=\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-\frac{k_1}{2}(q_2-q_1)^2-\frac{k_2}{2}(q_3-q_2)^2\\ &= \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T\begin{pmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{pmatrix}\dot{\vec{q}}-\frac{1}{2}\vec{q}^T\begin{pmatrix}k_1&-k_1&0\\-k_1&k_1+k_2&-k_2\\0&-k_2&k_2\end{pmatrix}\vec{q}\,.\end{aligned}$$

b) Die Bewegungsgleichung lautet in Matrixform

$$\begin{pmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{pmatrix}\ddot{\vec{q}}+\begin{pmatrix}k_1&-k_1&0\\-k_1&k_1+k_2&-k_2\\0&-k_2&k_2\end{pmatrix}\vec{q}=0$$

c) Die Eigenfrequenzen ergeben sich als Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned}0 &= \det(\hat{K}-\omega^2\hat{M})=\begin{vmatrix}k_1-m\omega^2&-k_1&0\\-k_1&(k_1+k_2)-m\omega^2&-k_2\\0&-k_2&k_2-m\omega^2\end{vmatrix}\\ &\overset{\lambda:=m\omega^2}{=} (k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_1+k_2-\lambda)-k_2^2(k_1-\lambda)-k_1^2(k_2-\lambda)\\ &= \left[k_1k_2-(k_1+k_2)\lambda+\lambda^2\right](k_1+k_2-\lambda)-k_1k_2^2+k_2^2\lambda-k_2k_1^2+k_1^2\lambda\\ &= k_1^2k_2-k_1(k_1+k_2)\lambda+k_1\lambda^2+k_1k_2^2-k_2(k_1+k_2)\lambda+k_2\lambda^2-k_1k_2\lambda+\\ &\quad+(k_1+k_2)\lambda^2-\lambda^3-k_1k_2^2+k_2^2\lambda-k_1^2k_2+k_1^2\lambda\\ &= -\lambda^3+\lambda^2[k_1+k_2+(k_1+k_2)]+\lambda[-k_1(k_1+k_2)-k_2(k_1+k_2)-k_1k_2+k_1^2+k_2^2]\\ &= -\lambda^3+2(k_1+k_2)\lambda^2-3k_1k_2\lambda=-\lambda[\lambda^2-2(k_1+k_2)\lambda+3k_1k_2]\,.\end{aligned}$$

Somit haben wir schon $\lambda_1=0$ als Lösung gefunden. Die anderen beiden Lösungen lauten

$$\begin{aligned}\lambda_{2,3} &= \frac{2(k_1+k_2)\pm\sqrt{4(k_1+k_2)^2-12k_1k_2}}{2}=(k_1+k_2)\pm\sqrt{(k_1+k_2)^2-3k_1k_2}\\ &= (k_1+k_2)\pm\sqrt{k_1^2-k_1k_2+k_2^2}=(k_1+k_2)\pm\sqrt{(k_1-k_2)^2+k_1k_2}\,.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die drei Eigenfrequenzen aus $\omega_i^2=\lambda_i/m$ mit $\omega_a^2=\frac{k_1}{m}$, $\omega_b^2=\frac{k_2}{m}$:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= 0\\ \omega_2^2 &= \omega_a^2+\omega_b^2+\sqrt{(\omega_a^2-\omega_b^2)^2+\omega_a^2\omega_b^2}\\ \omega_3^2 &= \omega_a^2+\omega_b^2-\sqrt{(\omega_a^2-\omega_b^2)^2+\omega_a^2\omega_b^2}\end{aligned}$$

d) Die Eigenschwingung ist der (normierte) Eigenvektor zur Eigenfrequenz $\omega_1 = 0$:

$$(\hat{K} - \omega_1^2 \hat{M})\vec{C}_1 = \hat{K}\vec{C}_1 = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \vec{C}_1 = 0 \implies \vec{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Diese Eigenschwingung beschreibt eine Translationsbewegung des Systems bei der der Schwerpunktsimpults (Gesamtimpuls) in x-Richtung erhalten ist. Die Erhaltung folgt aus der Translationsinvarianz ($x_i \to x_i + b$, $b =$const.) des Systems in x-Richtung.

e) Im Fall $k_1 = k_2 =: k$ lauten die anderen beiden Eigenfrequenzen

$$\omega_{2,3} = 2\frac{k}{m} \pm \frac{k}{m} .$$

Die Eigenschwingungen sind gegeben durch

$$(\hat{K} - \omega_2^2 \hat{M})\vec{C}_2 = \begin{pmatrix} -2k & -k & 0 \\ -k & -k & -k \\ 0 & -k & -2k \end{pmatrix} \vec{C}_2 = 0 \implies \vec{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{K} - \omega_3^2 \hat{M})\vec{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \vec{C}_3 = 0 \implies \vec{C}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– Bei der Eigenschwingung $\vec{C}_2$ bewegen sich die beiden äußeren Massen in die selbe Richtung während die mittlere Masse sich mit doppelter Amplitude in die Gegenrichtung bewegt.

– Bei der Eigenschwingung $\vec{C}_3$ bewegen sich die beiden äußeren Massen gegenphasig während die mittlere Masse ruht.

Aufgabe 4: Geben Sie möglichst kurze, prägnante Antworten auf folgende Fragen!

a) Wie lauten die 3 Newton'schen Axiome?

b) Was versteht man unter einer Symmetrie der Lagrange-Funktion und welcher Lehrsatz macht darüber welche Aussage?

c) Welche Annahme macht man in der Streutheorie für das Potential und wie berechnet sich dort die Gesamtenergie und der Gesamtdrehimpuls?

d) Wieviele Freiheitsgrade hat ein System mit n Teilchen und p Zwangsbedingungen der Form $f_k(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = 0$, $k = 1, \ldots, p$? Wie nennt man solche Zwangsbedingungen und wie lauten die Lagrange-Gleichungen erster Art für dieses System?

e) Wie lautet der allgemeine Ausdruck für den Trägheitstensor und den Satz von Steiner?

f) Geben sie die Hamilton-Funktion des elektromagnetischen Feldes an, indem sie eine Legendre-Transformation der folgenden Lagrange-Funktion durchführen:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t)\dot{\vec{r}}$$

LÖSUNG:

a) 1.: Es gibt Bezugssysteme (Inertialsysteme) in denen sich ein Massepunkt im Kräftefreien Raum mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.
2.: $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$
3.: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

b) Eine Symmetrie der Lagrange-Funktion ist eine Invarianz der Lagrange-Funktion unter einer Symmetrie-Transformation. Das Noether-Theorem besagt, dass jeder Symmetrie der Lagrange-Funktion eine Erhaltungsgröße entspricht.

c) $U(r \to \infty) \to 0$, $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$ und $l = mbv_\infty$ ($v_\infty = |\vec{v}\,|_{r\to\infty}$).

d) Anzahl der Freiheitsgrade: $3n - p$. Die Zwangsbedingungen sind holonom und die Lagrange-Gleichungen erster Art lauten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = Z_i$$

e) Trägheitstensor: $I_{\alpha\beta} = \int \rho(\vec{r})[r^2\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta]\ \mathrm{d}^3r$

Satz von Steiner: $I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + M[a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta]$

f) Der kanonische Impuls lautet

$$p_i = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c}A_i(\vec{r}, t) \implies \vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t)$$

Die Hamilton-Funktion ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} H(\vec{p}, \vec{r}, t) &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\Phi - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\Phi = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t)\right)^2 + e\Phi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$