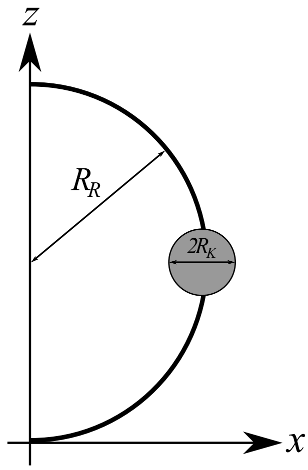
LÖSUNG ZU ÜBUNGSBLATT 4

Starrer Körper, Hamilton-Formalismus

1. RING MIT KUGEL (*)

Ein Ring, auf dem eine Kugel angebracht ist, rotiert um die z-Achse. Der Ring selbst besteht aus einem Draht mit der Längendichte λ. Die (homogene) Kugel hat die Masse m_K.



a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel.

Hinweis: $\displaystyle\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rings mithilfe eines Linienintegrals.

Hinweis: $\displaystyle\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

c) Geben Sie einen Ausdruck für das gesamte Trägheitsmoment an.

LÖSUNG:

a) Wir bezeichnen den senkrechten Abstand von der Drehachse mit $r_\perp$. Da die Kugel homogen ist, gilt $\rho(\vec{r}) = \rho$. Für das Trägheitsmoment I_K der Kugel gilt

$$\begin{aligned} I_K &= \int_V r_\perp^2 \, \mathrm{d}m = \int_V \rho(\vec{r}) r_\perp^2 \, \mathrm{d}^3 r = \int_0^{R_K} r^2 \, \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \rho r^2 \sin^2\vartheta \\ &= 2\pi\rho \int_0^{R_K} r^4 \, \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = 2\pi\rho \cdot \frac{1}{5} R_K^5 \cdot \frac{4}{3} = \rho \frac{4\pi}{3} R_K^3 \cdot \frac{2}{5} R_K^2 = \frac{2}{5} m_K R_K^2 \,. \end{aligned}$$

b) Zunächst müssen wir den Ring über den Polarwinkel θ parametrisieren:

$$\gamma : [0, \pi] \to R \subset \mathbb{R}^3 \,, \qquad \theta \mapsto \gamma(\theta) = R_R \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Der senkrechte Abstand eines Punktes auf dem Ring zur Drehachse ist einfach durch dessen x-Koordinate gegeben. Das Trägheitsmoment I_R lautet dann

$$I_R = \int_\gamma x^2 \, \mathrm{d}m = \int_\gamma \lambda x^2 \, \mathrm{d}s$$

mit dem Wegelement $\mathrm{d}s = \left\| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\theta} \right\| \mathrm{d}\theta = R_R \, \mathrm{d}\theta$. Aus $x^2 = R_R^2 \sin^2 I$ folgt dann

$$I_R = \int_0^\pi \lambda R_R^3 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\lambda \pi R_R^3 = \frac{1}{2} m_R R_R^2 \, .$$

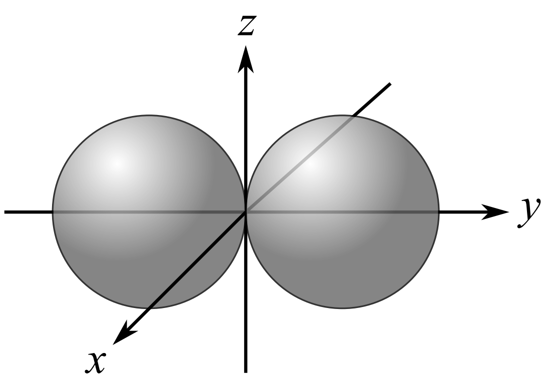
c) Aus dem Satz von Steiner und der Summe der eben berechneten Trägheitsmomente erhält man schließlich das gesamte Trägheitsmoment

$$I = I_R + I_K + m_K R_R^2 \, .$$

2. Zwei inhomgene Kugeln (*)

Berechnen Sie den Trägheitstensor von zwei identischen *inhomogenen* Kugeln, die am Ursprung zusammengeklebt sind und jeweils den Radius R sowie die Masse M haben. Die Dichteverteilung der Kugeln ist dabei gegeben durch:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \frac{5}{4\pi} \frac{M}{R^5} r^2$$



Lösung:

Der aus den beiden Kugeln zusammengesetzte Körper ist rotationssymmetrisch bzgl. der y-Achse. Somit ist der Trägheitstensor diagonal und es muss $I_{11} = I_{33}$ gelten. Da die Massenverteilung einer Kugel radialsymmetrisch ist, fällt der Schwerpunkt der Kugel mit ihrem Mittelpunkt zusammen. Für das Trägheitsmoment einer Kugel bzgl. einer beliebigen durch den Schwerpunkt gehenden Achse (z.B. der z-Achse) gilt unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
I_K &= \int\limits_K \rho(\vec{r})(x^2+y^2)\ \mathrm{d}^3r = \\
&= \frac{5}{4\pi}\frac{M}{R^5}\int\limits_0^R \mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta\ r^2\cdot r^2(\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\sin^2\varphi\sin^2\vartheta)\cdot r^2\sin\vartheta \\
&= \frac{5}{4\pi}\frac{M}{R^5}\int\limits_0^R r^6\ \mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta = \frac{5}{4\pi}\frac{M}{R^5}\cdot\frac{R^7}{7}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{10}{21}MR^2\,.
\end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment des Gesamtkörpers bzgl. der y-Achse lautet nun $I_{22} = 2I_K$. Für die anderen beiden Trägheitsmomente muss man den Satz von Steiner anwenden. Da die Schwerpunkte der Kugeln bei $y = \pm R$ liegen ergibt sich

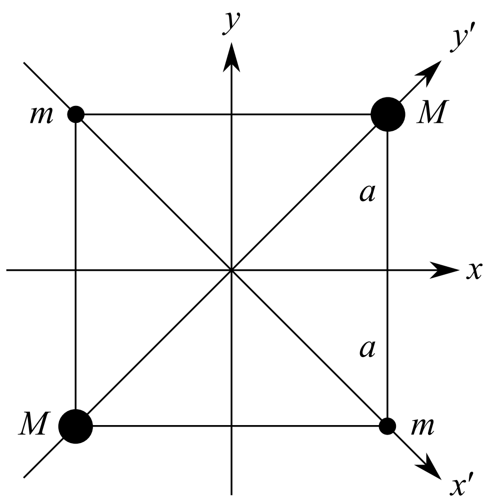
$$I_{11} = I_{33} = 2\cdot(I_K + MR^2) = 2I_K\left(1+\tfrac{21}{10}\right) = 2I_K\cdot\tfrac{31}{10}\,.$$

Damit lautet der Trägheitstensor

$$\hat{I} = 2I_K\begin{pmatrix}\frac{31}{10} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{31}{10}\end{pmatrix} = 2I_K\mathrm{diag}(\tfrac{31}{10},1,\tfrac{31}{10}).$$

3. Punktmassen im Quadrat (**)

An den Ecken eines Quadrates der Kantenlänge $2a$ befinden sich punktförmige Körper der Massen M und m wie aus nebenstehender Abbildung ersichtlich ist. Die z- und z'-Achsen sind identisch und zeigen auf den Betrachter.



a) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\hat{I}$ bezüglich der ungestrichenen Achsen.

b) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\hat{I}'$ bezüglich der gestrichenen Achsen.

c) Finden Sie durch Diagonalisieren von $\hat{I}$ die Hauptträgheitsmomente. Welche Bedeutung haben die Eigenwerte und wie lässt sich die zugehörige Transformationsmatrix $\hat{R} : \hat{I} \to \hat{I}'$ interpretieren?

Wie viele Rotations-Freiheitsgrade besitzt das System im Fall $M \neq 0$, $m \neq 0$ und im Fall $M \neq 0$, $m = 0$?

d) Ist eine Diagonalisierung für beliebige Massenanordnungen immer möglich?

LÖSUNG:

a) Die Massendichte lautet

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) \quad &= \quad [M\,(\delta(x-a)\delta(y-a) + \delta(x+a)\delta(y+a)) + \\ &\quad\; + m\,(\delta(x-a)\delta(y+a) + \delta(x+a)\delta(y-a))]\,\delta(z)\,. \end{aligned}$$

Der Trägheitstensor kann dann berechnet werden gemäß

$$\hat{I}_{ij} = \int \rho(\vec{r})\left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right)\,\mathrm{d}^3r\,.$$

Man erhält dann

$$I_{11} = \int \rho(\vec{r})(y^2+z^2)\,\mathrm{d}^3r = 2(M+m)a^2$$

$$I_{22} = \int \rho(\vec{r})(x^2+z^2)\,\mathrm{d}^3r = 2(M+m)a^2$$

$$I_{33} = \int \rho(\vec{r})(x^2+y^2)\,\mathrm{d}^3r = 4(M+m)a^2$$

$$I_{12} = I_{21} = -\int \rho(\vec{r})xy\,\mathrm{d}^3r = -2(M-m)a^2$$

$$I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$$

Damit lautet der Trägheitstensor

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2(M+m)a^2 & -2(M-m)a^2 & 0 \\ -2(M-m)a^2 & 2(M+m)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(M+m)a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_+ & I_- & 0 \\ I_- & I_+ & 0 \\ 0 & 0 & 2I_+ \end{pmatrix}$$

mit $I_\pm = 2a^2(m \pm M)$.

b) Die Massendichte lautet

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}\,') \quad &= \quad [M(\delta(y'-\sqrt{2}a) + \delta(y'+\sqrt{2}a))\delta(x') + \\ &= \quad + m(\delta(x'-\sqrt{2}a) + \delta(x'+\sqrt{2}a))\delta(y')]\delta(z')\,. \end{aligned}$$

Da die Massen nun genau auf den Achsen liegen ist der Trägheitstensor diagonal. Für diese Diagonalelemente gilt

$$I'_{11} = \int \rho(\vec{r}\,')(y'^2 + z'^2)\ \mathrm{d}^3r' = 4Ma^2$$

$$I'_{22} = \int \rho(\vec{r}\,')(x'^2 + z'^2)\ \mathrm{d}^3r' = 4ma^2$$

$$I'_{33} = \int \rho(\vec{r}\,')(x'^2 + y'^2)\ \mathrm{d}^3r' = 4(M+m)a^2$$

Damit lautet der Trägheitstensor

$$\hat{I}' = \begin{pmatrix} 4Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(M+m)a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_+ - I_- & 0 & 0 \\ 0 & I_+ + I_- & 0 \\ 0 & 0 & 2I_+ \end{pmatrix}$$

mit $I_\pm = 2a^2(m \pm M)$.

c) Der Trägheitstensor lässt sich diagonalisieren gemäß

$$\hat{I}' = \hat{T}\hat{I}\hat{T}^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

mit der Transformationsmatrix $\hat{T}$, deren Spalten aus den normierten Eigenvektoren von $\hat{I}$ bestehen. Die Diagonaleinträge von $\hat{I}'$ sind genau die Eigenwerte von $\hat{I}$. Die Eigenwerte sind gegeben durch die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\hat{I} - \lambda\hat{E}) = \begin{vmatrix} I_+ - \lambda & I_- & 0 \\ I_- & I_+ - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2I_+ - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (I_+ - \lambda)^2(2I_+ - \lambda) - (2I_+ - \lambda)I_-^2 = (2I_+ - \lambda)(I_+ + I_- - \lambda)(I_+ - I_- - \lambda)\,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte lauten somit $\lambda_{1,2} = I_+ \pm I_-$ und $\lambda_3 = 2I_+$. Für die (normierten) Eigenvektoren gilt

$$(\hat{I} - \lambda_{1,2}\hat{E})\vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp I_- & I_- & 0 \\ I_- & \mp I_- & 0 \\ 0 & 0 & I_+ \mp I_- \end{pmatrix} \vec{v}_{1,2} = 0 \implies \vec{v}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{I} - \lambda_3\hat{E})\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -I_+ & I_- & 0 \\ I_- & -I_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = 0 \implies \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet die Transformationsmatrix (an dieser Stelle haben wir die Reihenfolge der Eigenvektoren in der Transformationsmatrix, und die Position der Vorzeichen in $\vec{v}_{1,2}$, geschickt gewählt, da wir das Ergebnis schon erahnen konnten. Generell spielt das aber keine Rolle. Bei anderer Anordnung werden nur die Achsen umbenannt)

$$\hat{T} = (\vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{R}_z(-\pi/4)$$

wobei

$$\hat{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

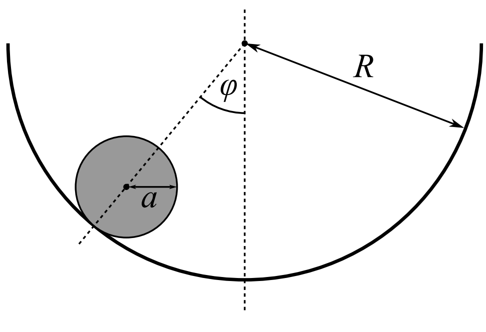
die Drehmatrix um die z-Achse im $\mathbb{R}^3$ ist. Dabei ist $\hat{R}_z \in SO(3)$, also $\hat{R}_z^{-1} = \hat{R}_z^T$ und $\det(\hat{R}_z) = 1$. D.h. also das $\hat{R}$ das ursprüngliche Koordinatensystem K auf das Hauptachsensystem K' dreht. Die Eigenwerte entsprechen gerade den Hauptträgheitsmomenten.

Im Falle $M \neq 0$, $m \neq 0$ sind alle Hauptträgheitsmomente von Null verschieden. Also besitzt das System drei Rotationsfreiheitsgrade.
Im Falle $M \neq 0$, $m = 0$ ist $I_2 = 0$ und $I_{1,3} \neq 0$. Also besitzt das System nur noch zwei Rotationsfreiheitsgrade.

e) Da der Trägheitstensor nach Konstruktion immer symmetrisch ist, also $\hat{I} = \hat{I}^T$, ist eine Diagonalisierung immer möglich. Weiterhin ist der Trägheitstensor reell, d.h. es ist sogar immer möglich eine orthogonale Matrix $\hat{R} \in SO(3)$ zu finden, so dass $\hat{D} = \hat{R}\hat{I}\hat{R}^T$, wobei $\hat{D}$ eine Diagonalmatrix ist.

4. Zylinder in Zylinder (**)

Ein homogener Zylinder mit der Masse M, Höhe H und dem Radius a rollt, ohne zu gleiten und unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft, auf einer festen Zylinderoberfläche mit dem Radius R.



a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders.

b) Geben Sie die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$ an und berechnen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage und zeigen Sie, dass man eine Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}$$

erhält.

LÖSUNG:

a) Wir wählen die Zylinderachse als Symmetrie- und z-Achse und verwenden natürlich Zylinderkoordinaten. Für das Trägheitsmoment des Zylinders gilt dann

$$I = \int\limits_V \rho r^2 \, \mathrm{d}^3 r = \rho \int\limits_0^a r \, \mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^H \mathrm{d}z \, r^2 = 2\pi H \rho \int\limits_0^a r^3 \, \mathrm{d}r = 2\pi H \rho \cdot \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{2} M a^2 \, .$$

b) Das problematische an dieser Aufgabe ist das Aufstellen der korrekten Beziehung zwischen φ und der Rotationsgeschwindigkeit des Zylinders ω. Aus der Rollbedingung $v = r\omega$ folgt mit $r \equiv a$:

$$\omega = \frac{v}{a} = \frac{R-a}{a} \dot{\varphi}$$

Für die kinetische Energie gilt dann

$$\begin{aligned} T &= T_{\mathrm{rot}} + T_{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{4} M a^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{4} M a^2 \frac{(R-a)^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 \, . \end{aligned}$$

Bei der potentiellen Energie muss man nun vorsichtig sein, denn setzt man den Nullpunkt in den Boden, also $U(\varphi = 0) = 0$, so nimmt die Energie sowohl für $0 < \varphi < \pi/2$ (Bewegung nach links oben) als auch für $-\pi/2 < \varphi < 0$ (Bewegung nach rechts oben) zu. Daher lautet das Potential

$$U = Mgh = Mg(R-a)(1 - \cos\varphi) = -Mg(R-a)\cos\varphi + \text{const.} \, .$$

Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{3}{4} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 + Mg(R-a)\cos\varphi \, .$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung liefert die Bewegungsgleichung

$$\frac{3}{2} M (R-a)^2 \ddot{\varphi} + Mg(R-a)\sin\varphi = 0$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{g}{R-a} \sin\varphi = 0 \, .$$

c) Unter Verwendung der Kleinwinkelnäherung ($\sin\varphi \simeq \varphi$) lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{g}{R-a} \varphi = 0 \, .$$

Dies ist offensichtlich die Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung mit

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}\,.$$

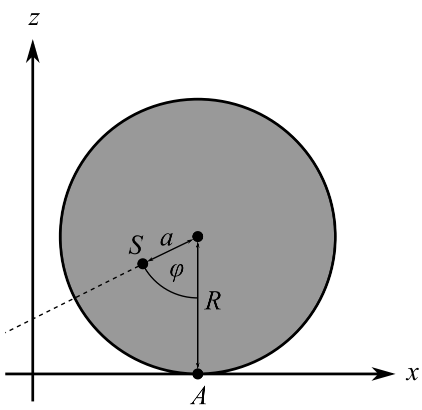
Als Lösung erhält man

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \psi_0)\,,$$

wobei sich φ_0 und ψ_0 aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen.

5. ZYLINDER MIT UNWUCHT (**)

Die Masse M eines *nicht* homogenen zylindrischen Rads mit Radius R ist so verteilt, dass eine der Hauptträgheitsachsen im Abstand a parallel zur Zylinderachse verläuft. Das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ist I_S. Der Zylinder rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer horizontalen Ebene.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in der Koordinate φ auf. Wie lautet die dazugehörige Bewegungsgleichung? Geben Sie die Lösung $\varphi_{a=0}(t)$ im Spezialfall $a = 0$ an.

b) Setzen Sie nun $\varphi(t) = \varphi_{a=0}(t) + a\xi(t)$ und entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für eine kleine Unwucht $a \ll R$ bis zur ersten Ordnung.

c) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot\varphi(t)$ als Funktion der Zeit an, wobei $\omega(0) = \omega_0$ gelten soll. Skizzieren Sie $\omega(t)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
Hinweis: $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x)$

LÖSUNG:

a) Die Hauptträgheitsachse im Abstand a parallel zur Zylinderachse geht durch den Schwerpunkt S. Wir berechnen zunächst die Koordinaten des Schwerpunkts in der x-z-Ebene ($y_S = 0$):

$$x_S = R\varphi - a\sin\varphi\,, \qquad \dot x_S = (R - a\cos\varphi)\dot\varphi$$
$$z_S = R - a\cos\varphi\,, \qquad \dot z_S = a\dot\varphi\sin\varphi$$

Die Translationsenergie

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}M\left(\dot x_S^2 + \dot z_S^2\right) = \frac{1}{2}M\left(R^2 - 2aR\cos\varphi + a^2\right)\dot\varphi^2\,,$$

die Rotationsenergie

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2$$

und die potentielle Energie

$$U = Mgz_S = Mg(R - a\cos\varphi)$$

führen auf die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} - U = \frac{1}{2} M \left(R^2 - 2aR\cos\varphi + a^2\right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 - Mg(R - a\cos\varphi)\,.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung liefert die Bewegungsgleichung

$$\left[M\left(R^2 - 2aR\cos\varphi + a^2\right) + I_S\right]\ddot{\varphi} + Ma\left(g + R\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi = 0\,.$$

Im Spezialfall $a = 0$ vereinfacht sich dies zu

$$\left(MR^2 + I_S\right)\ddot{\varphi}_{a=0} = 0 \implies \varphi_{a=0}(t) = \omega_0 t\,.$$

Diese Lösung beschreibt eine gleichförmige Rotationsbewegung (ohne Unwucht).

b) Für kleine Unwuchten a gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \omega_0 t + a\xi(t) \simeq \omega_0 t \\
\dot{\varphi}(t) &= \omega_0 + a\dot{\xi}(t) \simeq \omega_0 \\
\ddot{\varphi}(t) &= a\ddot{\xi}(t)
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit in erster Ordnung die Bewegungsgleichung

$$\left(MR^2 + I_S\right) a\ddot{\xi} + Ma(g + R\omega_0^2)\sin(\omega_0 t) = 0$$

bzw.

$$\ddot{\xi}(t) = -\frac{M(g + R\omega_0^2)}{MR^2 + I_S}\sin(\omega_0 t)\,.$$

c) Die Winkelgeschwindigkeit ist nun gegeben durch

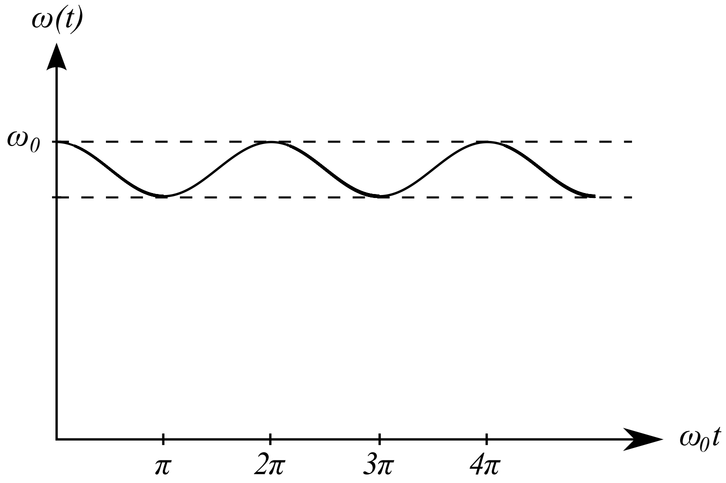
$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \omega_0 + a\dot{\xi}(t)\,.$$

Da $\omega(0) = \omega_0$ sein soll, folgt $\dot{\xi}(0) = 0$. Wir erhalten $\dot{\xi}(t)$ durch Integration und berücksichtigen die Anfangsbedingung in den Integralgrenzen:

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{M(g + R\omega_0^2)}{MR^2 + I_S}\int_0^t \sin(\omega_0 t')\,\mathrm{d}t' = \frac{M(g + R\omega_0^2)}{\omega_0(MR^2 + I_S)}\left(\cos(\omega_0 t) - 1\right)\,.$$

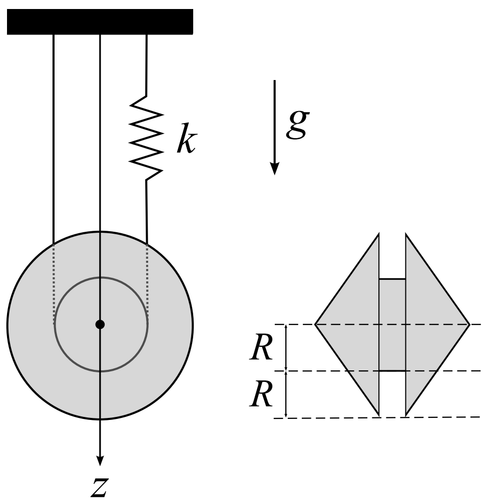
Für die Winkelgeschwindigkeit erhalten wir somit unter Verwendung des Hinweises

$$\omega(t) = \omega_0 \left(1 - \frac{2Ma(R + g/\omega_0^2)}{MR^2 + I_S} \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}\right) .$$



Die Winkelfrequenz schwankt periodisch um einen Mittelwert (s. Skizze). Für große $\omega_0^2 \gg g/R$, also z.B. für typische Reisegeschwindigkeiten eines Autorads, ist die relative Amplitude der Störung unabhängig von der Schwerkraft und nur durch die Geometrie der Massenverteilung festgelegt. Bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_0^2 \ll g/R$ wird die Amplitude der Störung durch die Schwerkraft verstärkt.

6. Gefedertes Jojo (**)



Ein homogener Körper, der aus zwei Kegel und einem Zylinder zusammengesetzt ist, hängt in einem Seil, das an der Decke befestigt und zusätzlich mit einer Feder versehen ist. Unter dem Einfluss der Gravitation kann dieser Körper auf und ab hüpfen wobei er sich gleichzeitig dreht, da wir annehmen, dass das Seil nicht gleitet. Die Masse der Kegel beträgt jeweils M, die des Zylinders $\frac{2}{5}M$. Die Feder hat die Federkonstante k.

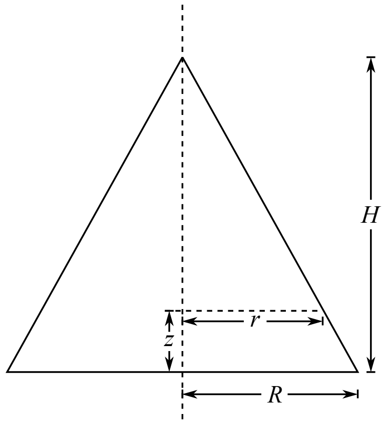
a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Kegels und geben Sie damit einen Ausdruck für das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Körpers an.

b) Geben Sie die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von z und $\dot{z}$ an und bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

c) Um was für eine Bewegung handelt es sich? Lösen Sie die *homogene* Bewegungsgleichung. Verwenden Sie dann als Lösungsansatz für die *inhomogene* Bewegungsgleichung eine konstante Funktion und geben Sie die allgemeine Lösung als Summe von homogener und inhomogener Lösung an.

Lösung:

a) Man betrachte einen Kegel mit der Höhe H und dem Radius R. Integriert wird im Folgenden von der Grundfläche $z = 0$ zur Spitze $z = H$ in Zylinderkoordinaten. Aus dem Strahlensatz (oder dem Tangens des halben Öffnungswinkels des Kegels) ergibt sich (s. Skizze)



$$\frac{H-z}{r} = \frac{H}{R} \implies z(r) = H\left(1 - \frac{r}{R}\right) .$$

Für das Trägheitsmoment bei einer Rotation um die Symmetrieachse gilt dann

$$\begin{aligned} I_K &= \int_V \rho(x^2+y^2)\, \mathrm{d}^3 r = \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R r\, \mathrm{d}r \int_0^{H(1-r/R)} \mathrm{d}z\, r^2 = 2\pi H\rho \int_0^R r^3 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \mathrm{d}r \\ &= 2\pi H\rho \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5}\right) = 2\pi H R^4 \rho \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H\rho \cdot R^2 = \frac{3}{10} M R^2 . \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment eines Zylinders haben wir in der vorherigen Aufgabe zu $I_Z = \frac{1}{2} M R^2$ berechnet. Damit ergibt sich als gesamtes Trägheitsmoment mit den angegebenen Radien und Massen

$$I = 2 \cdot \frac{3}{10} M (2R)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}M\right) R^2 = \frac{13}{5} M R^2 .$$

b) Unter Verwendung der Rollbedingung $\dot{z} = \omega R$ ergibt sich für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2}\left(M + M + \frac{2}{5}M\right)\dot{z}^2 = \frac{13}{10} M\dot{z}^2 + \frac{6}{5} M\dot{z}^2 = \frac{5}{2} M\dot{z}^2 .$$

Bei der potentiellen Energie ist zu beachten, dass sich die Feder doppelt so schnell dehnt wie der Körper sich bewegt und dass die Gewichtskraft in positiver z-Richtung angreift. Dann ergibt sich letztendlich

$$U = -\frac{12}{5} Mgz + \frac{1}{2} k (2z)^2 = -\frac{12}{5} Mgz + 2kz^2 .$$

Die Lagrange-Funktion lautet damit

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}) = \frac{5}{2}M\dot{z}^2 + \frac{12}{5}Mgz - 2kz^2 \,.$$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung folgt dann die Bewegungsgleichung

$$5M\ddot{z} - \frac{12}{5}Mg + 4kz = 0$$

bzw.

$$\ddot{z} + \frac{4k}{5M}z = \frac{12}{25}g \,.$$

c) Die Bewegungsgleichung stellt offensichtlich eine harmonische Schwingung mit

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{k}{M}}$$

dar. Die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung lautet daher

$$z_{\text{hom}}(t) = z_0 \cos(\omega t + \psi_0) \,.$$

Der Ansatz $z_{\text{inhom}}(t) = C$ =const. liefert eingesetzt in die inhomogene Bewegungsgleichung

$$\frac{4k}{5M}C = \frac{12}{25}g \implies C = \frac{3}{5}\frac{Mg}{k} \,.$$

Die allgemeine Lösung ist damit gegeben durch

$$z(t) = z_{\text{hom}}(t) + z_{\text{inhom}}(t) = z_0 \cos(\omega t + \psi_0) + \frac{3}{5}\frac{Mg}{k} \,,$$

wobei z_0 und ψ_0 aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können.

7. Senkrechter Wurf (*)

Betrachten Sie den senkrechten Wurf nach oben im homogenen Schwerefeld der Erde. Das Problem soll als eindimensional betrachtet werden.

a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion des Systems auf.

b) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung her.

c) Zeichnen Sie das Phasenraumportrait und interpretieren Sie die Schnittpunkte mit den Achsen.

Lösung:

a) Die Hamilton-Funktion lautet

$$\mathcal{H}(z, p_z) = T + U = \frac{p_z^2}{2m} + mgz = E\,.$$

Da die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt ist diese erhalten.

b) Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}\,, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -mg\,.$$

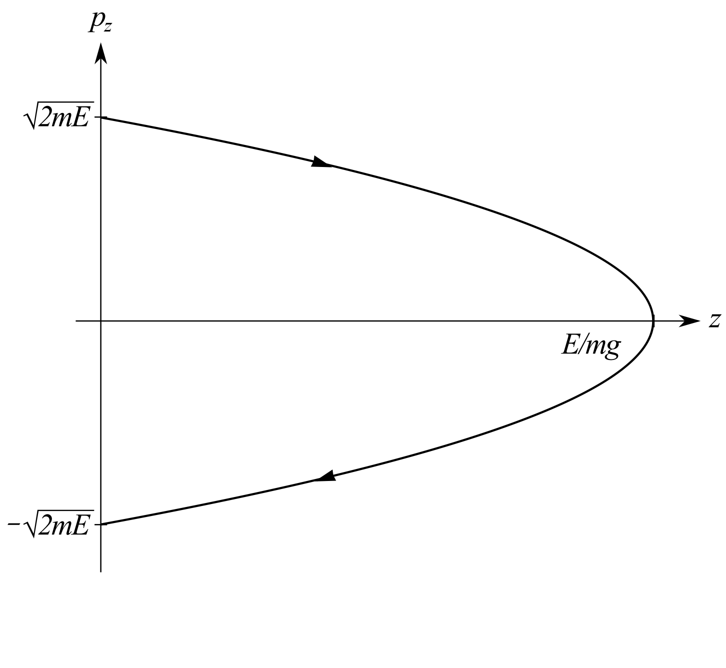
Wir erhalten damit die Bewegungsgleichung

$$\ddot{z} = \frac{\dot{p}_z}{m} = \frac{-mg}{m} = -g\,.$$

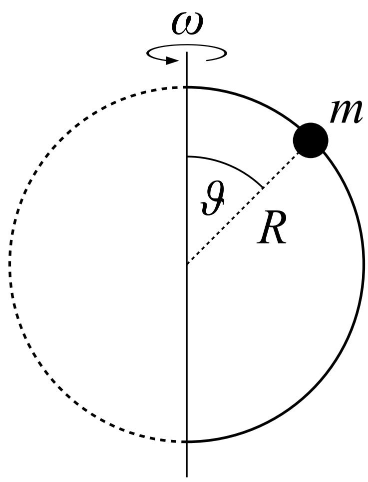
c) Löst man die Hamilton-Funktion nach p_z auf ergibt sich

$$p_z = \pm\sqrt{2m(E - mgz)}\,.$$

Diese Kurve entspricht also einer Wurzelfunktion, bzw. einer gedrehten Parabel. Der Schnittpunkt mit der z-Achse liegt bei $z = \frac{E}{mg}$ und stellt den Umkehrpunkt der Bewegung dar, bei dem der Impuls p_z gerade verschwindet. Die Schnittpunkte mit der p_z-Achse liegen bei $p_z = \pm\sqrt{2mE}$ und sind der Abwurfpunkt bei dem der Impuls maximal ist. Beim Abwurf ist der Impuls nach oben gerichtet (positiver Schnittpunkt), beim Auftreffen ist der Impuls nach unten gerichtet (negativer Schnittpunkt).



8. Perle auf Draht (**)



Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmigem rotierendem Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem ω um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.

a) Gehen Sie zunächst von der Lagrange-Funktion eines freien Teilchens in Kugelkoordinaten aus und bestimmen Sie die kanonischen Impulse:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right) .$$

b) Setzen Sie nun die Zwangsbedingungen in die Lagrange-Funktion ein und berechnen die Hamilton-Funktion.

c) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen für das System auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung ab. Wie lautet die Lösung für kleine Schwingungen um $\vartheta = \pi/2 + \psi$?

d) Bestimmen Sie die Gesamtenergie E und berechnen daraus $\mathrm{d}E/\,\mathrm{d}t$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

e) Berechnen Sie $\mathrm{d}\mathcal{H}/\,\mathrm{d}t$ und vergleichen Sie $\mathcal{H}$ mit der Gesamtenergie des Systems.

Lösung:

a) Die kanonischen Impulse lauten

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\vartheta &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi} \end{aligned}$$

b) Die Zwangsbedingungen lauten $r = R$ (skleronom)und $\varphi = \omega t$ (rheonom). Damit wird die Lagrange-Funktion zu

$$\mathcal{L}(\vartheta,\dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta\right) .$$

Es bleibt nur noch ein kanonischer Impuls übrig:

$$p_\vartheta = mR^2\dot{\vartheta} \implies \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mR^2}$$

Für die Hamilton-Funktion gilt dann

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\vartheta, p_\vartheta) &= p_\vartheta \dot{\vartheta} - \mathcal{L}(\vartheta, p_\vartheta) \\ &= \frac{p_\vartheta^2}{mR^2} - \frac{1}{2} mR^2 \left[\left(\frac{p_\vartheta}{mR^2} \right)^2 + \omega^2 \sin^2 \vartheta \right] \\ &= \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \,.\end{aligned}$$

c) Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mR^2} \\ \dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = mR^2 \omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\end{aligned}$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vartheta} = \frac{\dot{p}_\vartheta}{mR^2} = \frac{mR^2 \omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{mR^2} = \omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \,.$$

Für kleine Schwingungen um $\vartheta = \pi/2 + \psi$ gilt

$$0 = \ddot{\psi} - \omega^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = \ddot{\psi} + \omega^2 \cos\psi \sin\psi \simeq \ddot{\psi} + \omega^2 \psi \,.$$

Eine Lösung ist also

$$\psi(t) = \psi_0 \cos(\omega t + \xi) \,.$$

d) Wegen $U = 0$ folgt $\mathcal{L} = T = E$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} mR^2 \left(2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + 2\omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \dot{\vartheta} \right) \\ &= mR^2 \dot{\vartheta} \left(\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \right) = 2mR^2 \dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} \neq 0 \,.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist i.A. ungleich Null. Die physikalische Begründung dafür ist, dass dem System ständig Energie zu- und abgeführt wird, da sich der Draht konstant dreht.

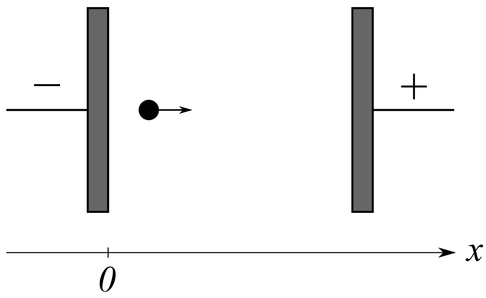
e) Die totale Zeitableitung der Hamilton-Funktion ist gleich ihrer partiellen. Somit gilt

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \,.$$

Die Hamilton-Funktion ist also erhalten, die Gesamtenergie jedoch nicht. Somit folgt daraus sofort

$$\mathcal{H} \neq E \,.$$

9. Elektron im Plattenkondensator (**)



Ein Elektron bewege sich im kräftefreien Raum entlang der x-Achse senkrecht zu den Platten eines Plattenkondensators, dessen Spannung linear in der Zeit anwächst.

a) Zeigen Sie, dass das Potential die Form

$$U(x,t) = -Axt\,, \quad A = \text{const.}$$

annimmt.

b) Stellen Sie mit diesem Potential die Lagrange-Funktion auf.

c) Stellen Sie die Hamilton-Funktion und die kanonischen Gleichungen auf. Wie lautet die Bahnkurve $x(t)$ für $x(0) = \dot{x}(0) = 0$?

d) Berechnen Sie $\mathrm{d}\mathcal{H}/\,\mathrm{d}t$ explizit mithilfe der berechneten Bahnkurve $x(t)$. Vergleichen Sie $\mathcal{H}$ mit der Energie. War es nötig die Lagrange-Funktion zu bestimmen?

Lösung:

a) Da die Spannung linear mit der Zeit zunehmen soll folgt:

$$U(t) = U_0 t \implies \vec{E}(t) = -E_0 t \vec{e}_x\,.$$

Für die Kraft auf das Elektron gilt mit $q = -e$

$$\vec{F}(t) = q\vec{E}(t) = eE_0 t\vec{e}_x \stackrel{!}{=} -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x\,.$$

Daraus ergibt sich für das Potential U

$$U(x;t) = -Axt$$

mit einer Konstanten A.

b) Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$\mathcal{L}(x,\dot{x};t) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + Axt\,.$$

c) Für den kanonischen Impuls gilt

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \implies \dot{x} = \frac{p_x}{m}\,.$$

Die Hamilton-Funktion lautet dann

$$\mathcal{H}(x, p_x; t) = p_x \dot{x} - \mathcal{L}(x, p_x; t) = \frac{p_x^2}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p_x}{m} \right)^2 - Axt = \frac{p_x^2}{2m} - Axt\,.$$

Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = At \end{aligned}$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = \frac{At}{m}\,.$$

Zweimalige Integration liefert unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$x(t) = \frac{1}{6} \frac{A}{m} t^3\,.$$

d) Für die totale Zeitableitung der Hamilton-Funktion gilt

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -Ax = -\frac{1}{6} \frac{A^2}{m} t^3\,.$$

Alternativ kann man die Koordinate und den Impuls durch die Zeit ausdrücken und in dieHamilton-Funktion einsetzen und zuletzt nach der Zeit ableiten. Es (muss) kommt dasselbe heraus, da hier das Potential geschwindigkeitsunabhängig ist und die Zwangsbedingungen skleronom (nämlich gar keine) sind:

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{p_x^2}{2m} - Axt = E\,.$$

Die Hamilton-Funktion entspricht hier also der Energie und der Umweg über die Lagrange-Funktion ist nicht nötig gewesen.

10. POISSON-KLAMMERN (**)

Zeigen Sie, mit den in der Vorlesung für Poisson-Klammern genannten Rechenregeln, folgende Identitäten:

a) $\{l_x, p_z\} = -p_y$,

b) $\{l_x, l_y\} = l_z$,

c) $\{x, f(p_x)\} = f'(p_x)$, wobei f eine analytische Funktion der p_x ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst dass $\{x, p_x^n\} = np_x^{n-1}$ gilt.

d) Bestätigen Sie c) durch explizite Anwendung der Definition der Poisson-Klammer.

Eine Koordinatentransformation $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ im Phasenraum, welche die kanonischen Gleichungen invariant lässt, wird *kanonische Transformation* genannt. Ein notwendiges Kriterium für eine kanonische Transformation ist, dass die neuen Koordinaten die fundamentalen Poisson-Klammern erfüllen:

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad \text{und} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}\,.$$

e) Zeigen Sie, durch explizite Anwendung der Definition der Poisson-Klammer, dass

$$Q = \arctan\frac{q}{p}\,, \qquad P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

eine kanonische Transformation ist.
Hinweis: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

f) Zusatzaufgabe: Wir können die Relation aus Teilaufgabe b) noch verallgemeinern. Zeigen Sie dass $\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k$ für $i, j, k = 1, 2, 3$ gilt.

Hinweis: Ein Blick auf das Zusatzblatt zum Levi-Civita-Symbol ist von Nutzen.

LÖSUNG:

a) Unter Verwendung der Rechenregeln für Poisson-Klammern findet man

$$\begin{aligned}
\{l_x, p_z\} &= \{(\vec{r} \times \vec{p})_x, p_z\} = \{yp_z - zp_y, p_z\} = \underbrace{\{yp_z, p_z\}}_{=0} - \{zp_y, p_z\} \\
&= -z\underbrace{\{p_y, p_z\}}_{=0} - p_y\underbrace{\{z, p_z\}}_{=1} = -p_y\,.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir insbesondere ausgenutzt, dass falls auf einer Seite der Klammer eine Koordinate q_i auftaucht und auf der anderen Seite der Klammer der dazugehörige Impuls p_i nicht auftaucht, diese Klammer verschwindet, völlig egal was noch in den Klammern steht.

b) Die eben erwähnte Tatsache wird uns die Berechnung ebenfalls drastisch erleichtern

$$\begin{aligned}
\{l_x, l_y\} &= \{(\vec{r}\times\vec{p})_x, (\vec{r}\times\vec{p})_y\} = \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} \\
&= \{yp_z, zp_x\} - \underbrace{\{yp_z, xp_z\}}_{=0} - \underbrace{\{zp_y, zp_x\}}_{=0} + \{zp_y, xp_z\} \\
&= y\{p_z, zp_x\} + p_z \underbrace{\{y, zp_x\}}_{=0} + z\underbrace{\{p_y, xp_z\}}_{=0} + p_y\{z, xp_z\} \\
&= y\big(p_x \underbrace{\{p_z, z\}}_{=-1} + z\underbrace{\{p_z, p_x\}}_{=0}\big) + p_y\big(x\underbrace{\{z, p_z\}}_{=1} + p_z\underbrace{\{z, x\}}_{=0}\big) \\
&= xp_y - yp_x = l_z
\end{aligned}$$

c) Gemäß dem Hinweis berechnen wir zuerst $\{x, p_x^n\}$

$$\begin{aligned}
\{x, p_x^n\} &= p_x\{x, p_x^{n-1}\} + p_x^{n-1}\{x, p_x\} = p_x^{n-1} + p_x\{x, p_x^{n-1}\} \\
&= p_x^{n-1} + p_x \cdot p_x\{x, p_x^{n-2}\} + p_x \cdot p_x^{n-2}\{x, p_x\} = 2p_x^{n-1} + p_x^2\{x, p_x^{n-2}\} \\
&\vdots \\
&= (n-1)p_x^{n-1} + p_x^{n-1}\{x, p_x\} = np_x^{n-1}
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Aussage lässt sich sehr leicht mit vollständiger Induktion zeigen, wir verzichten an dieser Stelle aber darauf.
Da f eine analytische Funktion ist, können wir sie als Potenzreihe darstellen:

$$f(p_x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_x^n \,.$$

Für die Poisson-Klammer gilt dann

$$\begin{aligned}
\{x, f(p_x)\} &= \left\{x, \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_x^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\{x, p_x^n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n p_x^{n-1} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n p_x^{n-1} = f'(p_x)\,.
\end{aligned}$$

d) Es gilt

$$\{x, f(p_x)\} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial p_x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p_x} = f'(p_x)\,.$$

e) $\{Q,Q\} = \{P,P\} = 0$ ist offensichtlich. Für die verbleibende Poisson-Klammer gilt

$$\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \\
&= \frac{\partial}{\partial q}\left(\arctan\frac{q}{p}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2}(q^2+p^2)\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\arctan\frac{q}{p}\right)\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}(q^2+p^2)\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}\cdot\frac{1}{p}\cdot p - \frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}\cdot\left(-\frac{q}{p^2}\right)\cdot q \\
&= \frac{p^2}{p^2+q^2} + \frac{q^2}{p^2+q^2} = \frac{p^2+q^2}{p^2+q^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Es handelt sich also tatsächlich um eine kanonische Transformation.

f) Mit dem Levi-Civita-Symbol gilt unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention

$$\begin{aligned}
\{l_i,l_j\} &= \{(\vec{r}\times\vec{p})_i,(\vec{r}\times\vec{p})_j\} \\
&= \{\epsilon_{abi}x_a p_b, \epsilon_{cdj}x_c p_d\} \\
&= \epsilon_{abi}\epsilon_{cdj}\{x_a p_b, x_c p_d\} \\
&= \epsilon_{abi}\epsilon_{cdj}\Big[x_a\underbrace{\{p_b,x_c\}}_{=-\delta_{bc}}p_d + x_a\underbrace{\{p_b,p_d\}}_{=0}x_c + p_b\underbrace{\{x_a,x_c\}}_{=0}p_d + p_b\underbrace{\{x_a,p_d\}}_{\delta_{ad}}x_c\Big] \\
&= \epsilon_{abi}\epsilon_{cdj}\left(\delta_{ad}x_c p_b - \delta_{bc}x_a p_d\right) \\
&= \epsilon_{abi}\epsilon_{caj}x_c p_b - \epsilon_{abi}\epsilon_{bdj}x_a p_d \\
&= \epsilon_{abi}\epsilon_{ajc}x_c p_b + \epsilon_{bai}\epsilon_{bdj}x_a p_d \\
&= (\delta_{bj}\delta_{ic} - \delta_{bc}\delta_{ij})x_c p_b + (\delta_{ad}\delta_{ij} - \delta_{aj}\delta_{id})x_a p_d \\
&= x_i p_j - \underbrace{x_b p_b}_{=\vec{r}\cdot\vec{p}} + \underbrace{x_a p_a}_{=\vec{r}\cdot\vec{p}} - x_j p_i \\
&= x_i p_j - x_j p_i \\
&= (\vec{r}\times\vec{p})_k \\
&= \epsilon_{ijk}l_k
\end{aligned}$$