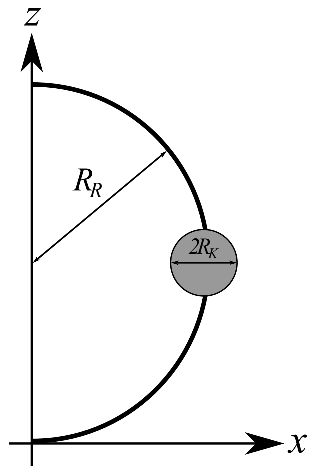
ÜBUNGSBLATT 4

Starrer Körper, Hamilton-Formalismus

1. Ring mit Kugel (*)

Ein Ring, auf dem eine Kugel angebracht ist, rotiert um die z-Achse. Der Ring selbst besteht aus einem Draht mit der Längendichte λ. Die (homogene) Kugel hat die Masse m_K.



a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel.

Hinweis: $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rings mithilfe eines Linienintegrals.

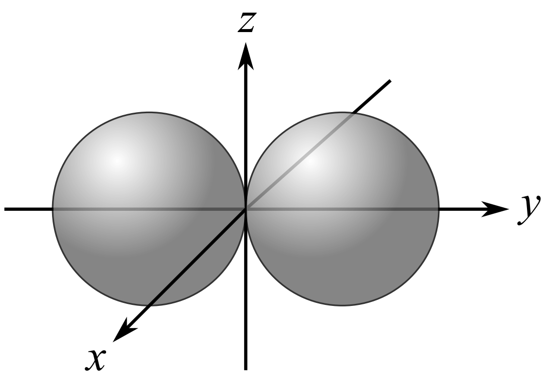
Hinweis: $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

c) Geben Sie einen Ausdruck für das gesamte Trägheitsmoment an.

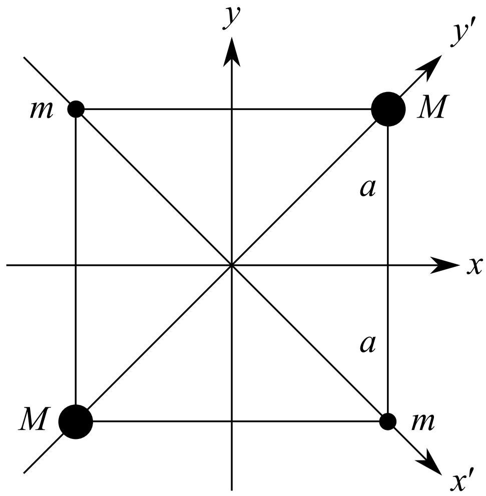
2. Zwei inhomogene Kugeln (*)

Berechnen Sie den Trägheitstensor von zwei identischen *inhomogenen* Kugeln, die am Ursprung zusammengeklebt sind und jeweils den Radius R sowie die Masse M haben. Die Dichteverteilung der Kugeln ist dabei gegeben durch:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \frac{4\pi}{5}\frac{M}{R^5}r^2$$



3. Punktmassen im Quadrat (**)



An den Ecken eines Quadrates der Kantenlänge $2a$ befinden sich punktförmige Körper der Massen M und m wie aus nebenstehender Abbildung ersichtlich ist. Die z- und z'-Achsen sind identisch und zeigen auf den Betrachter.

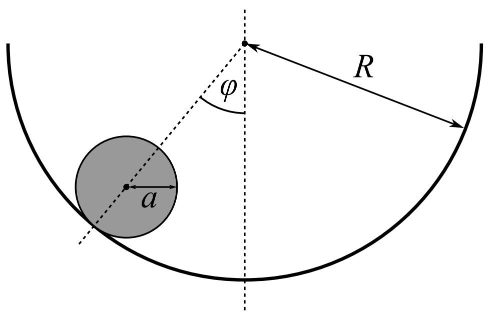
a) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\hat{I}$ bezüglich der ungestrichenen Achsen.

b) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\hat{I}'$ bezüglich der gestrichenen Achsen.

c) Finden Sie durch Diagonalisieren von $\hat{I}$ die Hauptträgheitsmomente. Welche Bedeutung haben die Eigenwerte und wie lässt sich die zugehörige Transformationsmatrix $\hat{R} : \hat{I} \to \hat{I}'$ interpretieren?
Wie viele Rotations-Freiheitsgrade besitzt das System im Fall $M \neq 0$, $m \neq 0$ und im Fall $M \neq 0$, $m = 0$?

d) Ist eine Diagonalisierung für beliebige Massenanordnungen immer möglich?

4. Zylinder in Zylinder (**)



Ein homogener Zylinder mit der Masse M, Höhe H und dem Radius a rollt, ohne zu gleiten und unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft, auf einer festen Zylinderoberfläche mit dem Radius R.

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders.

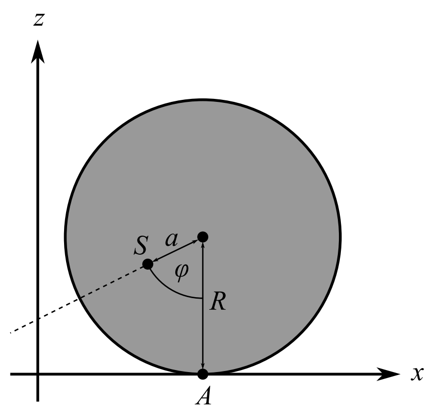
b) Geben Sie die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$ an und berechnen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage und zeigen Sie, dass man eine Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}$$

erhält.

5. Zylinder mit Unwucht (**)



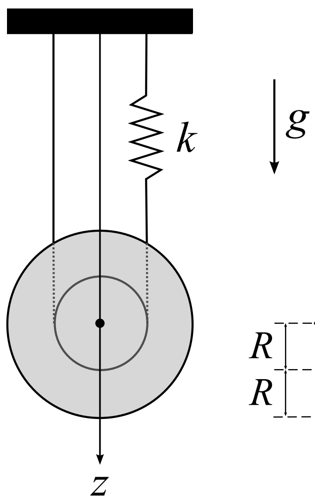
Die Masse M eines *nicht* homogenen zylindrischen Rads mit Radius R ist so verteilt, dass eine der Hauptträgheitsachsen im Abstand a parallel zur Zylinderachse verläuft. Das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ist I_S. Der Zylinder rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer horizontalen Ebene.

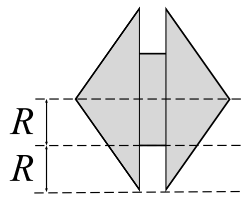
a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in der Koordinate φ auf. Wie lautet die dazugehörige Bewegungsgleichung? Geben Sie die Lösung $\varphi_{a=0}(t)$ im Spezialfall $a = 0$ an.

b) Setzen Sie nun $\varphi(t) = \varphi_{a=0}(t) + a\xi(t)$ und entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für eine kleine Unwucht $a \ll R$ bis zur ersten Ordnung.

c) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ als Funktion der Zeit an, wobei $\omega(0) = \omega_0$ gelten soll. Skizzieren Sie $\omega(t)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
Hinweis: $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$

6. Gefedertes Jojo (**)





Ein homogener Körper, der aus zwei Kegel und einem Zylinder zusammengesetzt ist, hängt in einem Seil, das an der Decke befestigt und zusätzlich mit einer Feder versehen ist. Unter dem Einfluss der Gravitation kann dieser Körper auf und ab hüpfen wobei er sich gleichzeitig dreht, da wir annehmen, dass das Seil nicht gleitet. Die Masse der Kegel beträgt jeweils M, die des Zylinders $\frac{2}{5}M$. Die Feder hat die Federkonstante k.

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Kegels und geben Sie damit einen Ausdruck für das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Körpers an.

b) Geben Sie die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von z und $\dot{z}$ an und bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

c) Um was für eine Bewegung handelt es sich? Lösen Sie die *homogene* Bewegungsgleichung. Verwenden Sie dann als Lösungsansatz für die *inhomogene* Bewegungsgleichung eine konstante Funktion und geben Sie die allgemeine Lösung als Summe von homogener und inhomogener Lösung an.

7. Senkrechter Wurf (*)

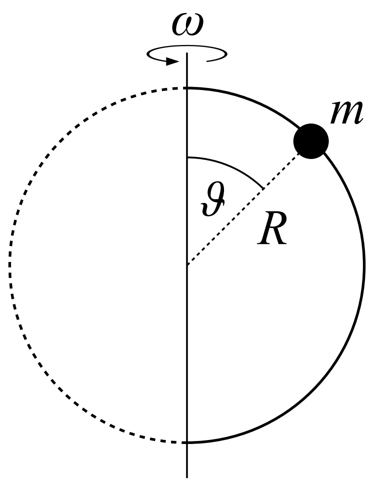
Betrachten Sie den senkrechten Wurf nach oben im homogenen Schwerefeld der Erde. Das Problem soll als eindimensional betrachtet werden.

a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion des Systems auf.

b) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung her.

c) Zeichnen Sie das Phasenraumportrait und interpretieren Sie die Schnittpunkte mit den Achsen.

8. Perle auf Draht (**)



Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmigem rotierendem Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem ω um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.

a) Gehen Sie zunächst von der Lagrange-Funktion eines freien Teilchens in Kugelkoordinaten aus und bestimmen Sie die kanonischen Impulse:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right) .$$

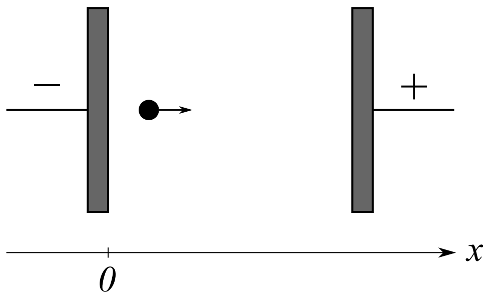
b) Setzen Sie nun die Zwangsbedingungen in die Lagrange-Funktion ein und berechnen die Hamilton-Funktion.

c) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen für das System auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung ab. Wie lautet die Lösung für kleine Schwingungen um $\vartheta = \pi/2 + \psi$?

d) Bestimmen Sie die Gesamtenergie E und berechnen daraus $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

e) Berechnen Sie $\mathrm{d}\mathcal{H}/\mathrm{d}t$ und vergleichen Sie $\mathcal{H}$ mit der Gesamtenergie des Systems.

9. Elektron im Plattenkondensator (**)



Ein Elektron bewege sich im kräftefreien Raum entlang der x-Achse senkrecht zu den Platten eines Plattenkondensators, dessen Spannung linear in der Zeit anwächst.

a) Zeigen Sie, dass das Potential die Form

$$U(x,t) = -Axt\,, \quad A = \text{const.}$$

annimmt.

b) Stellen Sie mit diesem Potential die Lagrange-Funktion auf.

c) Stellen Sie die Hamilton-Funktion und die kanonischen Gleichungen auf. Wie lautet die Bahnkurve $x(t)$ für $x(0) = \dot{x}(0) = 0$?

d) Berechnen Sie $\mathrm{d}\mathcal{H}/\,\mathrm{d}t$ explizit mithilfe der berechneten Bahnkurve $x(t)$. Vergleichen Sie $\mathcal{H}$ mit der Energie. War es nötig die Lagrange-Funktion zu bestimmen?

10. Poisson-Klammern (**)

Zeigen Sie, mit den in der Vorlesung für Poisson-Klammern genannten Rechenregeln, folgende Identitäten:

a) $\{l_x, p_z\} = -p_y$,

b) $\{l_x, l_y\} = l_z$,

c) $\{x, f(p_x)\} = f'(p_x)$, wobei f eine analytische Funktion der p_x ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst dass $\{x, p_x^n\} = np_x^{n-1}$ gilt.

d) Bestätigen Sie c) durch explizite Anwendung der Definition der Poisson-Klammer.

Eine Koordinatentransformation $(q,p) \longrightarrow (Q,P)$ im Phasenraum, welche die kanonischen Gleichungen invariant lässt, wird *kanonische Transformation* genannt. Ein notwendiges Kriterium für eine kanonische Transformation ist, dass die neuen Koordinaten die fundamentalen Poisson-Klammern erfüllen:

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \;\text{ und }\; \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}\,.$$

e) Zeigen Sie, durch explizite Anwendung der Definition der Poisson-Klammer, dass

$$Q = \arctan\frac{q}{p}\,, \quad P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

eine kanonische Transformation ist.
Hinweis: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

f) Zusatzaufgabe: Wir können die Relation aus Teilaufgabe b) noch verallgemeinern. Zeigen Sie dass $\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k$ für $i, j, k = 1, 2, 3$ gilt.

Hinweis: Ein Blick auf das Zusatzblatt zum Levi-Civita-Symbol ist von Nutzen.