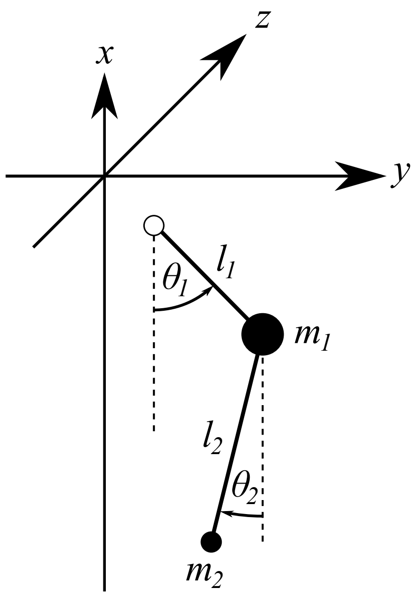
Lösung zu Übungsblatt 3

Lagrange-Formalismus, Systeme von Schwingungen

1. Ebenes Pendel (*)

Man betrachte ein ebenes Doppelpendel im dreidimensionalen Raum (siehe Abb.).



a) Zeigen Sie, dass es für dieses System vier holonome Zwangsbedingungen gibt. Formulieren Sie diese Zwangsbedingungen. Wie viele unabhängige Freiheitsgrade bleiben dem System folglich? Welches sind die geeigneten generalisierten Koordinaten q_i?

b) Drücken Sie die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$$

durch die generalisierte Koordinaten aus. Zeigen Sie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

und bestimmen sie die Matrix $a_{ij}(q)$.

Hinweis: $\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta)$

c) Geben Sie nun auch die potentielle Energie, ausgedrückt in generalisierten Koordinaten q_i an.

Lösung:

a) Das System hat a priori $3+3=6$ Freiheitsgrade. Die Zwangsbedingungen ergeben sich zu einem aus der Forderung, dass sich das Pendel in der x-y-Ebene bewegt und aus der festen Pendellänge. Sei (x_0, y_0) der Aufhängepunkt des Pendels mit Masse m_1 und (x_1, y_1) der Aufhängepunkt des Pendels mit Masse m_2, dann ergeben sich die vier holonomen Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= 0 \\ (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - l_1^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Somit bleiben $6 - 4 = 2$ unabhängige Freiheitsgrade übrig. Die geeignete generalisierte Koordinaten sind (wie fast immer beim Pendel) die Winkel θ_1 und θ_2:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - l_1 \cos\theta_1 \\
y_1 &= y_0 + l_1 \sin\theta_1 \\
x_2 &= x_1 - l_2 \cos\theta_2 = x_0 - l_1 \cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2 \\
y_2 &= y_1 + l_2 \sin\theta_2 = y_0 + l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2
\end{aligned}$$

b) Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)\,.$$

Die Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= l_1 \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \\
\dot{y}_1 &= l_1 \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \\
\dot{z}_1 &= 0 \\
\dot{x}_2 &= l_1 \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 \sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \\
\dot{y}_1 &= l_1 \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 \cos\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \\
\dot{z}_2 &= 0
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) = \frac{1}{2}m_1\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2(\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1)\right] = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 \\
T_2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}m_2\Big[l_1^2\dot{\theta}_1^2(\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1) + l_2^2\dot{\theta}_2^2(\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2) + \\
&\qquad + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2)\Big] \\
&= \frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]
\end{aligned}$$

Für die gesamte kinetische Energie gilt dann

$$\begin{aligned}
T_1 + T_2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1,\, \dot{\theta}_2\right)\underbrace{\begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1) & m_2l_2^2 \end{pmatrix}}_{a_{ij}(\theta_1,\theta_2)}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

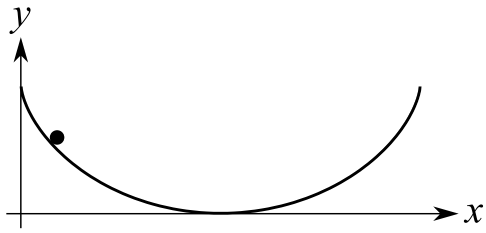
c) Für die potentielle Energie gilt

$$\begin{aligned} U &= m_1 g x_1 + m_2 g x_2 = m_1 g(x_0 - l_1 \cos\theta_1) + m_2 g(x_0 - l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2) \\ &= (m_1 + m_2) g x_0 - (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 \,. \end{aligned}$$

2. Zykloiden-Halfpipe (***)

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei im Schwerefeld der Erde auf einer umgekehrten Zykloide (ähnlich einer Halfpipe). Diese Zykloide kann durch

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 + \cos\varphi \end{pmatrix}$$



parametrisiert werden, wobei $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion unter Verwendung von φ als generalisierter Koordinate.

b) Zeigen Sie nun, dass daraus die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \cot\frac{\varphi}{2} - \frac{g}{2a}\cot\frac{\varphi}{2} = 0$$

folgt und verwenden Sie die Substitution $u = \cos\frac{\varphi}{2}$, um diese Gleichung drastisch zu vereinfachen.

Hinweis: $\cot\frac{\varphi}{2} = \dfrac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi}$

c) Geben Sie nun die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung an sowie die Lösung der Bewegungsgleichung für $\varphi(t = 0) = \varphi_0 > 0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$. Wie lauten damit die Gleichungen für $x(t)$ und $y(t)$? Wodurch zeichnet sich das System aus?

Hinweis: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Lösung:

a) Das Potential ist gegeben durch

$$U = mgy = mga(1 + \cos\varphi)\,.$$

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ma^2\left[\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi)^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right] \\ &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2(-2\cos\varphi + 2) = ma^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi)\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi}) = T - U = ma^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi) - mga(1+\cos\varphi) \cong ma^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi) - mga\cos\varphi\,,$$

wobei wir den konstanten Term $-mga$ vernachlßsigen können.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2ma^2\dot{\varphi}(1-\cos\varphi)\right] = 2ma^2\left[\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right] \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= ma^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi + mga\sin\varphi = 2ma^2\sin\varphi\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{2a}\right] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} - \frac{g}{2a}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = 0$$

und mit dem Hinweis

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\cot\frac{\varphi}{2} - \frac{g}{2a}\cot\frac{\varphi}{2} = 0\,.$$

Zunächst multiplizieren wir die Gleichung mit $\sin\frac{\varphi}{2}$:

$$\ddot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{g}{2a}\cos\frac{\varphi}{2} = 0\,.$$

Aus der Substitution erhalten wir

$$\begin{aligned} u &= \cos\frac{\varphi}{2} \\ \dot{u} &= -\frac{\dot{\varphi}}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ \ddot{u} &= -\frac{\ddot{\varphi}}{2}\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{\dot{\varphi}^2}{4}\cos\frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

und erhalten damit die neue Bewegungsgleichung

$$-2\ddot{u} - \frac{g}{2a}u = 0$$

bzw.

$$\ddot{u} + \frac{g}{4a}u = 0\,,$$

welche eine harmonische Schwingung mit $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}$ darstellt.

c) Eine allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ist durch

$$u(t) = A\cos(\omega t + \psi_0)$$

gegeben. Resubstitution liefert

$$\varphi(t) = 2\arccos(u(t)) = 2\arccos\left[A\cos(\omega t + \psi_0)\right]$$

und

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{2\omega A\sin(\omega t + \psi_0)}{\sqrt{1 - A^2\cos^2(\omega t + \psi_0)}}\,.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\varphi(0) = 2\arccos(A\cos\psi_0) = \varphi_0 \implies \psi_0 = \arccos\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{A}$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \iff \sin(\psi_0) = 0 \implies \psi_0 = 0 \implies A = \cos\frac{\varphi_0}{2}$$

Somit ist die spezielle Lösung der Bewegungsgleichung durch

$$\varphi(t) = 2\arccos\left(\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\omega t\right)$$

gegeben. Wenn wir nur den Zeitpunkt berechnen, an dem ein Massenpunkt den untersten Punkt der Halfpipe erreicht, ergibt sich

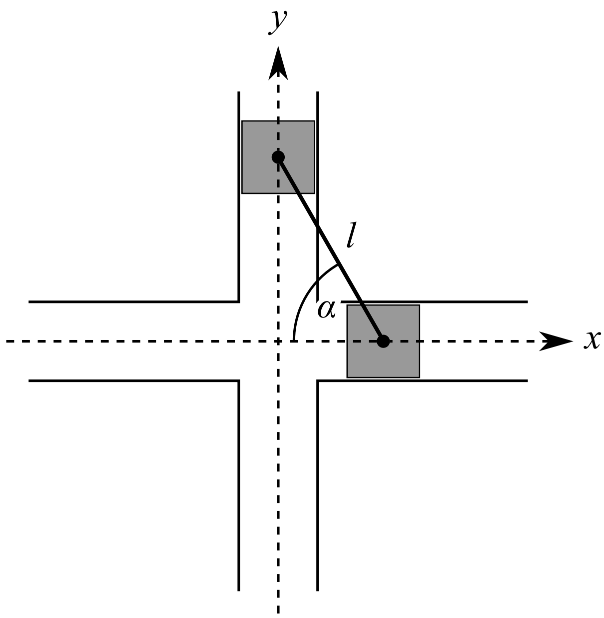
$$y(t) = 0 \iff \varphi(t) = \pi \implies \cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\omega t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2\omega}\,.$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Startposition φ_0. Also braucht ein Massenpunkt, völlig egal aus welcher Höhe er losgelassen wird, immer die selbe Zeit $t = \frac{\pi}{2\omega}$ bis er den Boden erreicht. Diese Eigenschaft nennt man *Tautochronie*.

Mathematica Applet: `http://goo.gl/hkbsx`

3. Klötze im Schacht (***)

Zwei Klötze gleicher Masse m sind durch eine starre, masselose Stange der Länge l verbunden und bewegen sich reibungsfrei entlang des in nebenstehender Abbildung vorgegebenen Weges unter dem Einfluss der Schwerkraft.



a) Wie lauten die Zwangsbedingungen? Stellen Sie die Lagrange-Funktion für die verallgemeinerte Koordinate $\alpha(t)$ auf.

b) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung in der Form

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\cos\alpha = 0$$

geschrieben werden kann, wobei g die Graviationsbeschleunigung ist.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des entlang der y-Achse fallenden Körpers als Funktion des Winkels α. Die Anfangsbedingung folge aus einer kleinen Auslenkung aus dem labilen Gleichgewicht bei $\alpha = 90°$. Wie groß ist $\dot{y}$ bei $\alpha = 45°$, $\alpha = 0°$ und $\alpha = -45°$ für $l = 1$ m, $g \simeq 10$ m/s^2?

Hinweis: Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichung mit $\dot{\alpha}$ und finden Sie einen Ausdruck für $\dot{\alpha}$.

d) Bestimmen Sie den Winkel, unter welchem die Fallgeschwindigkeit am größten ist, und den entsprechenden Betrag der Geschwindigkeit

Lösung:

a) Für dieses System gelten die Zwangsbedingungen $x_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$ und $y_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$. Daher eignet sich als generalisierte Koordinate der Winkel α:

$$y_1 = l\sin\alpha$$
$$x_2 = l\cos\alpha$$

Das Potential ist gegeben durch

$$U = mgy_1 = mgl\sin\alpha\,.$$

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\alpha}^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\right] = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2\,.$$

Damit ergibt sich die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\alpha, \dot{\alpha}) = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - mgl\sin\alpha$$

b) Aus der Euler-Lagrange-Gleichung folgt

$$ml^2\ddot{\alpha} + mgl\cos\alpha = 0 \iff \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\cos\alpha = 0\,.$$

c) Mit dem Hinweis ergibt sich

$$\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}\frac{g}{l}\cos\alpha = 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\sin\alpha\right) = 0\,.$$

Integration liefert

$$\dot{\alpha}^2 + 2\frac{g}{l}\sin\alpha = C\,.$$

Mit den Anfangsbedingungen $\alpha(t = 0) = 90°$, $\dot{\alpha}(t = 0) = 0$ ergibt sich die Konstante C:

$$C = \frac{2g}{l}$$

Setzt man die Konstante wieder ein erhält man

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{2g}{l}(\sin\alpha - 1) = 0 \implies \dot{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(1 - \sin\alpha)}\,.$$

Im Zusammenhang mit den Anfangsbedingungen macht hier nur das negative Vorzeichen einen Sinn und für die Geschwindigkeit $\dot{y}_1$ ergibt sich

$$\dot{y}_1(\alpha) = l\dot{\alpha}\cos\alpha = -\cos\alpha\sqrt{2gl(1 - \sin\alpha)}\,.$$

Mit den angegebenen Werten ergeben sich folgende Geschwindigkeiten: $\dot{y}_1(45°) = -1.7$ m/s, $\dot{y}_1(0°) = -4.5$ m/s, $\dot{y}_1(-45°) = -4.1$ m/s.

d) Für maximale Geschwindigkeit gilt $\ddot{y}_1 = 0$. Für die Ableitung erhält man

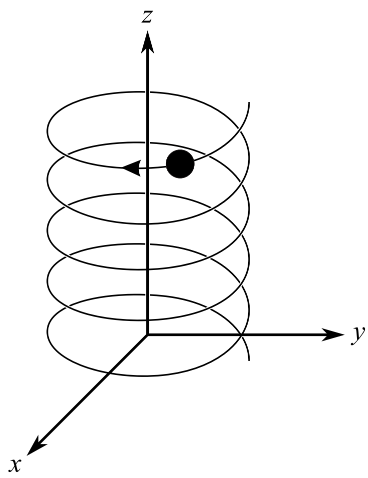
$$
\begin{aligned}
\ddot{y}_1 &= -\sqrt{2gl}\left[-\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}\sqrt{1-\sin\alpha}+\cos\alpha\frac{1}{2\sqrt{1-\sin\alpha}}\cdot(-\cos\alpha)\cdot\dot{\alpha}\right] \\
&= \sqrt{2gl}\dot{\alpha}\left[\sin\alpha\sqrt{1-\sin\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{2\sqrt{1-\sin\alpha}}\right] \\
&= \sqrt{2gl}\cdot\left(-\sqrt{2g/l}\right)\sqrt{1-\sin\alpha}\left[\sin\alpha\sqrt{1-\sin\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{2\sqrt{1-\sin\alpha}}\right] \\
&= -g\left[2\sin\alpha(1-\sin\alpha)+\cos^2\alpha\right] = -g\left[2\sin\alpha-2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right] \\
&= g\left[3\sin^2\alpha-2\sin\alpha-1\right] = 3g\left[\sin^2\alpha-\tfrac{2}{3}\sin\alpha-\tfrac{1}{3}\right] \\
&= 3g(\sin\alpha-1)(\sin\alpha+\tfrac{1}{3})
\end{aligned}
$$

Die Lösung $\sin\alpha = 1$ ist die triviale Lösung, da dort die Änderung von $\dot{y}_1$ immer 0 ist. Somit ist die für uns entscheidende Lösung $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ bzw. $\alpha \simeq 19.5°$. Die dazugehörige Geschwindigkeit beträgt $\dot{y}_1^{\max} = -4.9$ m/s.

4. Perle auf Schraubenlinie (**)

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einer Schraubenlinie mit dem Radius R und $a > 0$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\phi(t) \\ R\sin\phi(t) \\ a\phi(t) \end{pmatrix}.$$



Die Schwerkraft wirke in negative z-Richtung.

a) Wie lauten die Zwangsbedingungen?

b) Formulieren Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art.

c) Benutzen Sie die Zwangsbedingungen um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen und bestimmen Sie die Zwangskräfte.

Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z).

Lösung:

a) Es gibt hier zwei holonome Zwangsbedingungen:

$$f_1 = \rho - R = 0$$
$$f_2 = z - a\phi = 0$$

wobei die Konstante a ein Maß für den Anstieg der Schraubenlinie ist.

b) Die Lagrange-Funktion (der zunächst freien Perle) lautet

$$\mathcal{L}(\rho, \phi, z, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}) = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz\,.$$

Daraus erhalten wir die drei Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 &= \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \rho} = \lambda_1 = Z_\rho \\ m(\rho^2\ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}) &= \sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \phi} = -a\lambda_2 = Z_\phi \\ m\ddot{z} + mg &= \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f_k}{\partial z} = \lambda_2 = Z_z \end{aligned}$$

c) Wegen $\rho = R$ folgt $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ und mit $z = a\phi$ erhalten wir

$$\begin{aligned} -mR\dot{\phi}^2 &= \lambda_1 \\ mR^2\ddot{\phi} &= -a\lambda_2 \\ ma\ddot{\phi} + mg &= \lambda_2 \end{aligned}$$

Ziel ist es nun, die Lagrange-Multiplikatoren λ_k und die Zwangskräfte Z_i *unabhängig* von den Koordinaten und Geschwindigkeiten darzustellen. Zur Bestimmung von λ_2 stellen wir die beiden unteren Gleichungen nach $\ddot{\phi}$ um und setzen sie gleich:

$$-\frac{a\lambda_2}{mR^2} = \frac{\lambda_2 - mg}{ma}\,.$$

Damit ist

$$\lambda_2 = \frac{mgR^2}{a^2 + R^2} = Z_z = -\frac{1}{a} Z_\phi\,.$$

Desweiteren benutzen wir den Ausdruck für $\ddot{\phi}$ aus der zweiten umgestellten Gleichung, setzen das Ergebnis für λ_2 ein

$$\ddot{\phi} = -\frac{ag}{a^2 + R^2}$$

und erhalten nach Integration unter der Annahme, dass $\dot{\phi}(0) = 0$,

$$\dot{\phi} = -\frac{ag}{a^2 + R^2} t\,.$$

Damit erhalten wir jetzt für λ_1

$$\lambda_1 = -\frac{mRa^2g^2}{(a^2 + R^2)^2} t^2 = Z_\rho\,.$$

Die Ergebnisse für λ_1 und λ_2 können und in die Lagrange-Gleichungen 1. Art eingesetzt werden um zu vereinfachten Bewegungsgleichungen zu gelangen. Wir sehen, dass die Zwangskraft Z_ρ zeitabhängig ist, während für die Zwangskräfte Z_ϕ und Z_z keine Zeitabhängigkeit vorliegt.

5. VARIATIONSPRINZIP (**)

a) Betrachten Sie eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}; t)$ die auch noch von der zweiten Ableitung von q nach der Zeit abhängt. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für diese Funktion durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}}\right)\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}; t) = 0$$

gegeben ist, wobei wir davon ausgehen, dass weder q noch $\dot{q}$ an den Randpunkten variiert werden, d.h. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = \delta \dot{q}(t_1) = \delta \dot{q}(t_2) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten (sog. *geodätische Linie*) auf einer Kugel durch einen Großkreisbogen gegeben ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass das Linienelement auf einer Kugeloberfläche vom Radius R durch $\mathrm{d}s = R\sqrt{1 + \sin^2\vartheta\varphi'^2}\,\mathrm{d}\vartheta$ mit $\varphi' = \mathrm{d}\varphi/\,\mathrm{d}\vartheta$ gegeben ist.

LÖSUNG:

a) Wir gehen analog zur Vorlesung vor und erhalten somit

$$\begin{aligned}
& \delta S[q] = 0 \\
\iff\; & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} S(\eta)\Big|_{\eta=0} = 0 \\
\iff\; & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_0(t) + \eta\tilde{q}(t),\, \dot{q}_0(t) + \eta\dot{\tilde{q}}(t),\, \ddot{q}_0(t) + \eta\ddot{\tilde{q}}(t);\, t)\ \mathrm{d}t\right]_{\eta=0} = 0 \\
\iff\; & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\mathcal{L}(q_0(t) + \eta\tilde{q}(t),\, \dot{q}_0(t) + \eta\dot{\tilde{q}}(t),\, \ddot{q}_0(t) + \eta\ddot{\tilde{q}}(t);\, t)\right]_{\eta=0} \mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{\iff} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q}\mathcal{L}(q_0(t),\dot{q}_0(t),\ddot{q}_0(t);t)\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta}q(t)}_{=\tilde{q}(t)} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\mathcal{L}(q_0(t),\dot{q}_0(t),\ddot{q}_0(t);t)\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta}\dot{q}(t)}_{=\dot{\tilde{q}}(t)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \ddot{q}}\mathcal{L}(q_0(t),\dot{q}_0(t),\ddot{q}_0(t);t)\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta}\ddot{q}(t)}_{=\ddot{\tilde{q}}(t)} \,\mathrm{d}t = 0$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\iff} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial q}\cdot \tilde{q}(t)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \dot{q}}\cdot \tilde{q}(t)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ wegen } \tilde{q}(t_1)=\tilde{q}(t_2)=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \dot{q}}\cdot \tilde{q}(t)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \ddot{q}}\cdot \dot{\tilde{q}}(t)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ wegen } \dot{\tilde{q}}(t_1)=\dot{\tilde{q}}(t_2)=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \ddot{q}}\cdot \dot{\tilde{q}}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{\iff} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial q}\cdot \tilde{q}(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \dot{q}}\cdot \tilde{q}(t)\,\mathrm{d}t -$$

$$- \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \ddot{q}}\cdot \tilde{q}(t)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ wegen } \tilde{q}(t_1)=\tilde{q}(t_2)=0} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \ddot{q}}\cdot \tilde{q}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\iff \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \dot{q}} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial \mathcal{L}(q_0,\dot{q}_0,\ddot{q}_0;t)}{\partial \ddot{q}}\right)\cdot \tilde{q}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Dies führt auf die zu zeigende Behauptung.

b) Die Koordinaten eines Punktes auf einer Kugeloberfläche vom Radius R sind durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

gegeben. Für die Differentiale gilt nun

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi + \cos\varphi\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\ -\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}y^2 \\ \mathrm{d}z^2 \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\varphi \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\varphi^2 - 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta + \cos^2\varphi\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta^2 \\ \cos^2\varphi \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\varphi^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta^2 \\ \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta^2 \end{pmatrix} .$$

Somit folgt

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = R^2\left(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2\right) = R^2\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vartheta}\right)^2 + 1\right]\mathrm{d}\vartheta^2$$

bzw.

$$\mathrm{d}s = R\sqrt{1+\sin^2\vartheta\varphi'^2}\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Die Lagrange-Funktion des zu minimierenden Funktionals ist dann

$$\mathcal{L}(\varphi,\varphi';\vartheta) = \sqrt{1+\sin^2\vartheta\varphi'^2}\,.$$

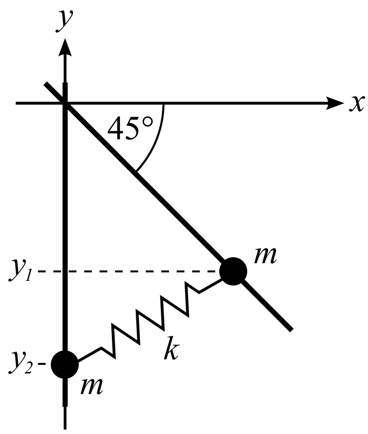
Da die Lagrange-Funktion unabhängig von φ ist, ist φ eine zyklische Koordinate und der dazugehörige kanonische Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} = \frac{\sin^2\vartheta\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\vartheta\varphi'^2}} = \text{const.}$$

ist erhalten. O.B.d.A. sei der erste Punkt der gesuchten Strecke der Nordpol, also ist $\vartheta = 0$ und somit $p_\varphi = 0$. Für alle $\vartheta \neq 0$ muss aber $p_\varphi = 0$ ebenfalls gelten. Somit folgt $\varphi' = 0$ bzw. $\varphi = \text{const.}$ Also sind die gesuchten Kurven Großkreisbögen.

6. Tit For Tat (***)

Zwei punktförmige Körper gleicher Masse m bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde reibungsfrei auf einer vertikalen, bzw. um 45° geneigten, Geraden (s. Abb.). Sie sind mit einer idealen Feder mit Federkonstanten k verbunden, die im entspannten Zustand Länge $l = 0$ hat. Es wirken keine weitern Kräfte.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den Variablen y_1 und y_2 auf, den vertikalen Komponenten der Koordinaten der Massenpunkte.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage.

d) Es ist nun sinnvoll neue Koordinaten ξ_1 und ξ_2 einzuführen, welche die Auslenkung der Massen aus der Gleichgewichtslage beschreiben. Zeigen Sie dass sich damit die

Lagrange-Funktion auf folgende Form vereinfachen lässt:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(2\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2\right)$$

e) Geben Sie die neuen Bewegungsgleichungen in Matrixform an und bestimmen sie die Eigenschwingungen des Systems. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

a) Wegen $x_1 = y_1$ ist die kinetische Energie durch

$$T = \frac{1}{2}m(2\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)$$

gegeben. Die potentielle Energie lautet

$$U = -mg(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}k\left[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2\right] = -mg(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}k(2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2)\,,$$

wobei sich die Länge der gedehnte Feder aus dem Satz des Pythagoras ergibt. Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$\mathcal{L}(\vec{y}, \dot{\vec{y}}) = T - U = \frac{1}{2}m(2\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + mg(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}k(2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2)\,.$$

b) Als Bewegungsgleichungen ergeben sich

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= \frac{g}{2} - \frac{k}{2m}(2y_1 - y_2)\\ \ddot{y}_2 &= g - \frac{k}{m}(y_2 - y_1)\end{aligned}$$

c) In der Gleichgewichtslage verschwinden alle Ableitungen von y_i. Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}2y_1 - y_2 &= \frac{mg}{k} =: y_0\\ y_2 - y_1 &= \frac{mg}{k} =: y_0\end{aligned}$$

Setzt man die beiden Gleichungen gleich, erhält man $y_2 = \frac{3}{2}y_1$ und damit lassen sich die Ruhelagen zu $y_1^{(0)} = 2y_0$ und $y_2^{(0)} = 3y_0$ bestimmen.

d) Wir führen nun die neuen Koordinaten ein:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= y_1 - y_1^{(0)} = y_1 - 2y_0\\ \xi_2 &= y_2 - y_2^{(0)} = y_2 - 3y_0\end{aligned}$$

Setzt man die inverse Transformation und deren Ableitung in die Lagrange-Funktion aus a) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\vec{\xi},\dot{\vec{\xi}}) &= \frac{1}{2}m(2\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2)+mg(\xi_1+\xi_2+5y_0)- \\
&\quad -\frac{1}{2}k(2\xi_1^2+8\xi_1y_0+8y_0^2+\xi_2^2+6\xi_2y_0+9y_0^2-2\xi_1\xi_2-6\xi_1y_0-4\xi_2y_0-12y_0^2) \\
&= \frac{m}{2}(2\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2)+mg(\xi_1+\xi_2)-\frac{k}{2}(2\xi_1^2+\xi_2^2-2\xi_1\xi_2)-\underbrace{ky_0}_{=mg}(\xi_1+\xi_2) \\
&= \frac{m}{2}(2\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2)-\frac{k}{2}(2\xi_1^2+\xi_2^2-2\xi_1\xi_2)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir konstante Terme vernachlässigt haben.

e) Aus der Lagrange-Funktion erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\begin{pmatrix}2m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\ddot{\vec{\xi}}+\begin{pmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{pmatrix}\vec{\xi}=0\,.$$

Aus der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \det(\hat{K}-\omega^2\hat{M})=\begin{vmatrix}2(k-\omega^2m) & -k\\ -k & (k-\omega^2m)\end{vmatrix}=2(k-\omega^2m)^2-k^2 \\
&= 2k^2-4km\omega^2+2m^2\omega^4-k^2=2m^2\left(\omega^4-2\frac{k}{m}\omega^2+\frac{1}{2}\frac{k^2}{m^2}\right)
\end{aligned}$$

ergeben sich die Eigenfrequenzen aus den Nullstellen des Klammerterms

$$\omega_{1,2}^2=\frac{2\frac{k}{m}\pm\sqrt{4\frac{k^2}{m^2}-2\frac{k^2}{m^2}}}{2}=\omega_0^2\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,,$$

wobei $\omega_0^2:=\frac{k}{m}$. Die Eigenschwingungen ergeben sich als (normierte) Eigenvektoren

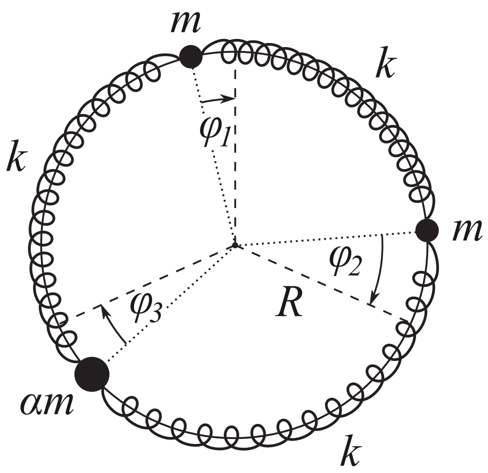
$$(\hat{K}-\omega_1^2\hat{M})\vec{C}_1=k\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -1\\ -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\vec{C}_1=0\implies\vec{C}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$(\hat{K}-\omega_2^2\hat{M})\vec{C}_2=k\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\vec{C}_2=0\implies\vec{C}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

- Die erste Eigenschwingung stellt eine gegenphasige Bewegung der Massen dar.
- Die zweite Eigenschwingung stellt eine gleichphasige Bewegung der Massen dar.

In beiden Fällen ist die Amplitude der zweiten Masse um den Faktor $\sqrt{2}$ größer.

7. Gefederte Massen auf Ring (**)



Drei Massenpunkte können sich reibungsfrei auf einem Kreisring mit Radius R bewegen und sind durch drei identische Federn mit Federkonstante k miteinander verbunden (s. Abb.). Zwei der Massenpunkte haben die gleiche Masse m, während der dritte die Masse $M = \alpha m$, $\alpha > 0$ hat. Es wirken keine weiteren Kräfte.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System auf. Verwenden Sie als generalisierte Koordinaten die Winkel φ_i, $i = 1, 2, 3$, die als Auslenkungen aus einer durch gleiche Federspannungen bestimmten Lage definiert seien.

b) Stellen Sie daraus die Bewegungsgleichungen für dieses System auf.

c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen aus den Bewegungsgleichungen.

Hinweis: Die charakteristische Gleichung der aus den Bewegungsgleichungen folgenden Matrix mit den noch zu bestimmenden Größen β und λ kann faktorisiert werden gemäß

$$\begin{vmatrix} 2\beta - \lambda & -\beta & -\beta \\ -\beta & 2\beta - \lambda & -\beta \\ -\beta & -\beta & 2\beta - \alpha\lambda \end{vmatrix} = \lambda(3\beta - \lambda)[\alpha\lambda - \beta(\alpha + 2)]\,.$$

d) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenschwingungen und interpretieren Sie diese.

e) Welche Symmetrie weist dieses System auf? Welche Erhaltungsgröße gibt es aufgrund dieser Symmetrie? Welche Eigenschwingung ist mit dieser Erhaltungsgröße assoziiert und wie groß ist die zugehörige Eigenfrequenz?

Lösung:

a) Mit den Bogenlängen $s_i = R\varphi_i$ ergibt sich für die Energien

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(R\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}m(R\dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2}\alpha m(R\dot{\varphi}_3)^2 = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \alpha\dot{\varphi}_3^2\right) \\ U &= \frac{1}{2}kR^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}kR^2(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2}kR^2(\varphi_3 - \varphi_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}kR^2\left[(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + (\varphi_3 - \varphi_1)^2\right] \end{aligned}$$

Somit lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\vec{\varphi}, \dot{\vec{\varphi}}) = T - U = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \alpha\dot{\varphi}_3^2\right) - \frac{1}{2}kR^2\left[(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + (\varphi_3 - \varphi_1)^2\right]\,.$$

Mit der Euler-Lagrange-Gleichung lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{\varphi}_1 + k(2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \\ m\ddot{\varphi}_2 + k(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \\ \alpha m\ddot{\varphi}_3 + k(-\varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_3) &= 0 \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \alpha m \end{pmatrix} \ddot{\vec{\varphi}} + \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix} \vec{\varphi} = 0\,.$$

c) Die Eigenfrequenzen des Systems ergeben sich als Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \det(\hat{K} - \omega^2 \hat{M}) &= \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & -k & 2k - \omega^2 \alpha m \end{vmatrix} \\ &= m\omega^2 \left(3k - m\omega^2\right) \left[\alpha m\omega^2 - k(2+\alpha)\right]\,, \end{aligned}$$

wobei wir den Hinweis verwendet haben. Wir erhalten somit die drei Lösungen

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0 \\ \omega_2^2 &= 3\frac{k}{m} = 3\omega_0^2 \\ \omega_3^2 &= \frac{k}{m}\frac{2+\alpha}{\alpha} = \omega_0^2\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

wobei $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$.

d) Die Eigenschwingungen ergeben sich als (normierte) Eigenvektoren

$$(\hat{K} - \omega_1^2 \hat{M})\vec{C}_1 = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{C}_1 = 0 \implies \vec{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{K} - \omega_2^2 \hat{M})\vec{C}_2 = k \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2-3\alpha \end{pmatrix} \vec{C}_2 = 0 \implies \vec{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{K} - \omega_3^2 \hat{M})\vec{C}_3 = k \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{\alpha} & -1 & -1 \\ -1 & 1-\frac{2}{\alpha} & -1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{pmatrix} \vec{C}_3 = 0 \implies \vec{C}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

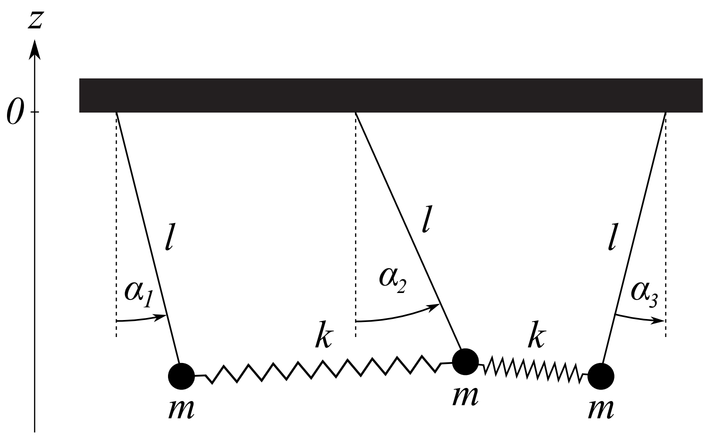
– Die zur Eigenfrequenz $\omega_1^2 = 0$ gehörende Eigenschwingung stellt eine gleichförmige Rotation aller drei Massen in die gleiche Richtung, mit der gleichen

Amplitude, dar.

- Die zur Eigenfrequenz $\omega_2^2 = 2\omega_0$ gehörende Eigenschwingung stellt eine gegenphasige Schwingung der kleinen Massen, mit gleicher Amplitude, dar. Die große Masse bleibt in Ruhe.
- Die zur Eigenfrequenz $\omega_3^2 = \omega_0(1 + \frac{2}{\alpha})$ gehörende Eigenschwingung stellt eine gleichphasige Schwingung der kleinen Massen, mit gleicher Amplitude, dar, während die große Masse gegenphasig mit einer um den Faktor $\frac{2}{\alpha}$ veränderten Amplitude schwingt.

e) Es liegt eine Rotationssymmetrie der auf dem Kreis angeordneten Massen vor. Wenn man alle Massen um den gleichen Winkel φ verschiebt bleibt die Energie des System unverändert, da keine Feder aus ihrer Ruhelage ausgelenkt wird.
Die dazugehörige Erhaltungsgröße ist der Gesamtdrehimpuls $l = mR^2(2+\alpha)\dot{\varphi}$.
Die assoziierte Eigenschwingung ist $\vec{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ mit Eigenfrequenz $\omega_1 = 0$.
Es handelt sich um eine Anregung des Systems, die keine Energie kostet.

8. Gekoppelte Fadenpendel (***)



Drei gleiche mathematische Pendel (Masse m, Länge l) sind durch zwei ideale Federn derselben Federkonstante k verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde (s. Abb.). Die Länge jeder der unbelasteten Federn ist jeweils gleich dem Abstand der Aufhängungspunkte der zwei durch sie verbundenen Pendel.

a) Formulieren Sie die Lagrange-Funktion im Falle kleiner Auslenkungen.
Hinweis: Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_i^3)$.

b) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.
Hinweis: Die Beziehung $(a+b-x)(a+2b-x) - 2b^2 = (a-x)(a+3b-x)$ könnte sich als nützlich erweisen.

d) Berechnen Sie die zu den zwei langsamsten Eigenschwingungen gehörenden Eigenvektoren und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

e) Geben Sie die zur schnellsten Schwingungsmode gehörende Eigenschwingung mit kurzer Begründung, aber ohne Rechnung, an.

Lösung:

a) Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(l\dot{\alpha}_1)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\alpha}_2)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\alpha}_3)^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 + \dot{\alpha}_3^2) \\
&= \frac{1}{2}\dot{\vec{\alpha}}^T \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 \end{pmatrix} \dot{\vec{\alpha}}\,.
\end{aligned}$$

Die potentielle Energie U setzt sich aus der Lageenergie U_g und der Spannenergie der Feder U_k zusammen. Für die Lageenergie gilt

$$\begin{aligned}
U_g &= -mgl\cos\alpha_1 - mgl\cos\alpha_2 - mgl\cos\alpha_3 = -mgl(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3) \\
&\simeq -mgl\left[\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{\alpha_3^2}{2}\right)\right] \\
&= -mgl\left[3 - \frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right)\right] = \frac{mgl}{2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right) + \text{const.}\,.
\end{aligned}$$

Für die Spannenergie der Feder gilt

$$\begin{aligned}
U_k &= \frac{1}{2}k\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3\right) \\
&= \frac{1}{2}k\left[(l\sin\alpha_1 - l\sin\alpha_2)^2 + (l\cos\alpha_1 - l\cos\alpha_2)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (l\sin\alpha_2 - l\sin\alpha_3)^2 + (l\cos\alpha_2 - l\cos\alpha_3)^2\right] \\
&\simeq \frac{kl^2}{2}\left[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{kl^2}{2}\left(\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2\right) + \mathcal{O}(\alpha_i^3)\,,
\end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile stammen die ersten beiden Klammern aus den Sinus-, die letzten beiden Klammern aus den Cosinus-Termen.

Die gesamte potentielle Energie lautet damit

$$\begin{aligned}
U &= U_g + U_k = \frac{mgl}{2}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right) + \frac{kl^2}{2}\left(\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[(mgl+kl^2)\alpha_1^2 - 2kl^2\alpha_1\alpha_2 + (mgl+2kl^2)\alpha_2^2 - 2kl^2\alpha_2\alpha_3 + (mgl+kl^2)\alpha_3^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\vec{\alpha}^T \begin{pmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 & 0 \\ -kl^2 & mgl+2kl^2 & -kl^2 \\ 0 & -kl^2 & mgl+kl^2 \end{pmatrix} \vec{\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\vec{\alpha},\dot{\vec{\alpha}}) = T-U = \frac{1}{2}\dot{\vec{\alpha}}^T \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 \end{pmatrix} \dot{\vec{\alpha}} - \frac{1}{2}\vec{\alpha}^T \begin{pmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 & 0 \\ -kl^2 & mgl+2kl^2 & -kl^2 \\ 0 & -kl^2 & mgl+kl^2 \end{pmatrix} \vec{\alpha}\,.$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung liefert die Bewegungsgleichung in Matrixform

$$\begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 \end{pmatrix} \ddot{\vec{\alpha}} + \begin{pmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 & 0 \\ -kl^2 & mgl+2kl^2 & -kl^2 \\ 0 & -kl^2 & mgl+kl^2 \end{pmatrix} \vec{\alpha} = 0\,.$$

c) Die Eigenfrequenzen ergeben sich als Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \det(\hat{K} - \omega^2\hat{M}) \\
&= \begin{vmatrix} mgl+kl^2-ml^2\omega^2 & -kl^2 & 0 \\ -kl^2 & mgl+2kl^2-ml^2\omega^2 & -kl^2 \\ 0 & -kl^2 & mgl+kl-ml^2\omega^2 \end{vmatrix} \\
&= ml^2 \begin{vmatrix} \frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l}+2\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2 \end{vmatrix} \\
&= ml^2 \begin{vmatrix} \omega_a^2+\omega_b^2-\omega^2 & -\omega_b^2 & 0 \\ -\omega_b^2 & \omega_a^2+2\omega_b^2-\omega^2 & -\omega_b^2 \\ 0 & -\omega_b^2 & \omega_a^2+\omega_b^2-\omega^2 \end{vmatrix} \\
&= ml^2(\omega_a^2+\omega_b^2-\omega^2)^2(\omega_a^2+2\omega_b^2-\omega^2) - 2\omega_b^4(\omega_a^2+\omega_b^2-\omega^2) \\
&= ml^2(\omega_a^2+\omega_b^2-\omega^2)\left[(\omega_a^2+\omega_b^2-\omega^2)(\omega_a^2+2\omega_b^2-\omega^2) - 2\omega_b^4\right] \\
&= ml^2(\omega_a^2+\omega_b^2-\omega^2)(\omega_a^2-\omega^2)(\omega_a^2+3\omega_b^2-\omega^2)
\end{aligned}$$

mit $\omega_a^2 = \frac{g}{l}$ und $\omega_b^2 = \frac{k}{m}$.

Wir erhalten damit die drei Eigenfrequenzen

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \omega_a^2 + \omega_b^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \\
\omega_2^2 &= \omega_a^2 = \frac{g}{l} \\
\omega_3^2 &= \omega_a^2 + 3\omega_b^2 = \frac{g}{l} + 3\frac{k}{m}
\end{aligned}$$

d) Wegen $\omega_2 < \omega_1 < \omega_3$ sind die zwei langsamsten Eigenschwingungen durch die zu ω_1 und ω_2 gehörigen Eigenvektoren bestimmt. Es gilt

$$(\hat{K} - \omega_1^2 \hat{M})\vec{C}_1 = ml^2\omega_b^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{C}_1 = 0 \implies \vec{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{K} - \omega_2^2 \hat{M})\vec{C}_2 = ml^2\omega_b^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{C}_2 = 0 \implies \vec{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die erste Eigenschwingung beschreibt eine gegenphasige Schwingung der beiden äußeren Pendel mit gleicher Amplitude während das mittlere Pendel ruht.
- Die zweite Eigenschwingung beschreibt eine gleichphasige Schwingung aller drei Pendel mit gleicher Amplitude. Die Federn bleiben also stets entspannt weshalb die zugehörige Eigenfrequenz $\omega_2^2 = \frac{g}{l}$ auch nur den Beitrag der Gravitationswirkung enthält.

e) Die zur schnellsten Eigenfrequenz $\omega_3^2 = \frac{g}{l} + 3\frac{k}{m}$ gehörende Eigenschwingung enthält den Term $3\frac{k}{m}$, alle drei Federn müssen bei dieser Schwingung also belastet sein. Das ist nur dann möglich, wenn das mittlere Pendel sich in die entgegengesetzte Richtung wie die beiden äußeren Pendel bewegt. Auf das mittlere Pendel, das ja an beide Federn gekoppelt ist, wirkt eine doppelt so starke Kraft, es muss also mit zweimal so großer Amplitude schwingen wie die beiden äußeren Pendel. Der Eigenvektor lautet daher

$$\vec{C}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

9. Noether-Theorem (*)

Welche Komponenten des Impulses $\vec{p}$ und Drehimpulses $\vec{L}$ bleiben erhalten, wenn sich ein Massenpunkt im dreidimensionalen Potential bewegt, dessen Äquipotentialflächen durch folgende Fälle vorgegeben sind:

a) unendliche Ebenen parallel zur xz-Ebene,

b) konzentrische Zylinderhülsen mit Zylinderachsen auf der y-Achse,

c) konzentrische Kugeloberflächen,

d) konzentrische gerade Kreiskegel mit identischen Öffnungswinkeln und der x-Achse als Symmetrieachse,

e) konzentrische Ellipsoidoberflächen mit $a = b \neq c$.

Lösung:

a) Das System ist invariant unter Translation in x- oder z-Richtung. Somit sind die zugehörigen Impulskomponenten p_x und p_z erhalten. Das System ist außerdem invariant unter Rotationen um die y-Achse. Somit ist die zugehörige Drehimpulskomponente L_y erhalten.

b) Das System ist invariant unter Translation in y-Richtung. Somit ist die zugehörige Impulskomponente p_y erhalten. Das System ist außerdem invariant unter Rotationen um die y-Achse. Somit ist die zugehörige Drehimpulskomponente L_y erhalten.

c) Das System ist invariant unter Rotationen um alle drei Achsen. Somit sind alle zugehörigen Drehimpulskomponenten bzw. der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ erhalten.

d) Das System ist invariant unter Rotationen um die x-Achse. Somit ist die zugehörige Drehimpulskomponente L_x erhalten.

e) Das System ist invariant unter Rotationen um die z-Achse. Somit ist die zugehörige Drehimpulskomponente L_z erhalten.