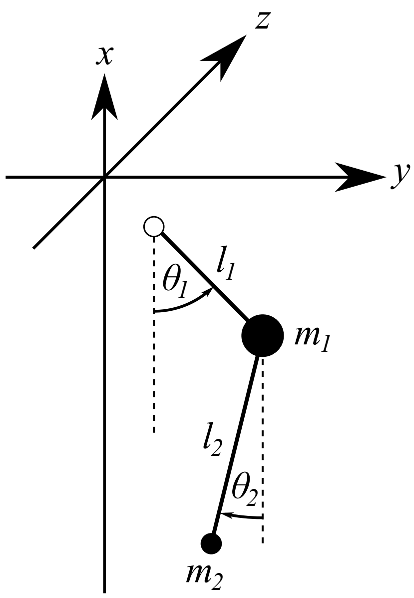
Übungsblatt 3

Lagrange-Formalismus, Systeme von Schwingungen

1. Ebenes Pendel (*)

Man betrachte ein ebenes Doppelpendel im dreidimensionalen Raum (siehe Abb.).



a) Zeigen Sie, dass es für dieses System vier holonome Zwangsbedingungen gibt. Formulieren Sie diese Zwangsbedingungen. Wie viele unabhängige Freiheitsgrade bleiben dem System folglich? Welches sind die geeigneten generalisierten Koordinaten q_i?

b) Drücken Sie die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$$

durch die generalisierte Koordinaten aus. Zeigen Sie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

und bestimmen sie die Matrix $a_{ij}(q)$.

Hinweis: $\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta)$

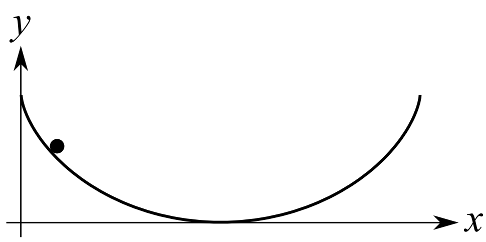
c) Geben Sie nun auch die potentielle Energie, ausgedrückt in generalisierten Koordinaten q_i an.

2. Zykloiden-Halfpipe (***)

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei im Schwerefeld der Erde auf einer umgekehrten Zykloide (ähnlich einer Halfpipe). Diese Zykloide kann durch

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 + \cos\varphi \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden, wobei $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion unter Verwendung von φ als generalisierter Koordinate.

b) Zeigen Sie nun, dass daraus die Bewegungsgleichung

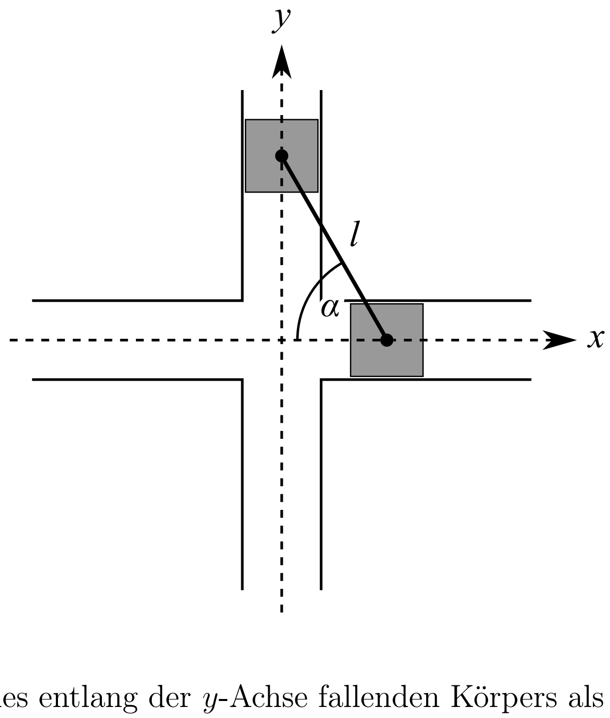
$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \cot\frac{\varphi}{2} - \frac{g}{2a}\cot\frac{\varphi}{2} = 0$$

folgt und verwenden Sie die Substitution $u = \cos\frac{\varphi}{2}$, um diese Gleichung drastisch zu vereinfachen.
Hinweis: $\cot\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$

c) Geben Sie nun die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung an sowie die Lösung der Bewegungsgleichung für $\varphi(t=0) = \varphi_0 > 0$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0$. Wie lauten damit die Gleichungen für $x(t)$ und $y(t)$? Wodurch zeichnet sich das System aus?
Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Klötze im Schacht (***)

Zwei Klötze gleicher Masse m sind durch eine starre, masselose Stange der Länge l verbunden und bewegen sich reibungsfrei entlang des in nebenstehender Abbildung vorgegebenen Weges unter dem Einfluss der Schwerkraft.



a) Wie lauten die Zwangsbedingungen? Stellen Sie die Lagrange-Funktion für die verallgemeinerte Koordinate $\alpha(t)$ auf.

b) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung in der Form

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\cos\alpha = 0$$

geschrieben werden kann, wobei g die Graviationsbeschleunigung ist.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des entlang der y-Achse fallenden Körpers als Funktion des Winkels α. Die Anfangsbedingung folge aus einer kleinen Auslenkung aus dem labilen Gleichgewicht bei $\alpha = 90°$. Wie groß ist $\dot{y}$ bei $\alpha = 45°$, $\alpha = 0°$ und $\alpha = -45°$ für $l = 1$ m, $g \simeq 10$ m/s^2?

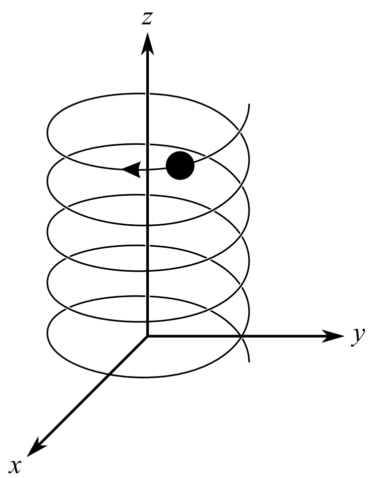
Hinweis: Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichung mit $\dot{\alpha}$ und finden Sie einen Ausdruck für $\dot{\alpha}$.

d) Bestimmen Sie den Winkel, unter welchem die Fallgeschwindigkeit am größten ist, und den entsprechenden Betrag der Geschwindigkeit

4. Perle auf Schraubenlinie (**)

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einer Schraubenlinie mit dem Radius R und $a > 0$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\phi(t) \\ R\sin\phi(t) \\ a\phi(t) \end{pmatrix}.$$



Die Schwerkraft wirke in negative z-Richtung.

a) Wie lauten die Zwangsbedingungen?

b) Formulieren Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art.

c) Benutzen Sie die Zwangsbedingungen um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen und bestimmen Sie die Zwangskräfte.

Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z).

5. Variationsprinzip (**)

a) Betrachten Sie eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}; t)$ die auch noch von der zweiten Ableitung von q nach der Zeit abhängt. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für diese Funktion durch

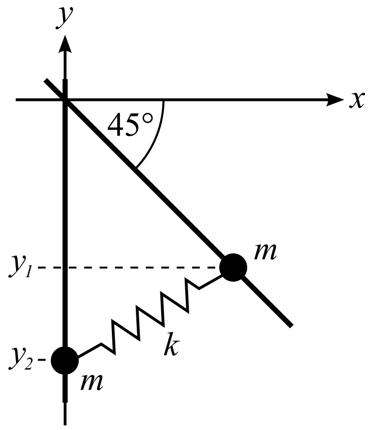
$$\left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}}\right)\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}; t) = 0$$

gegeben ist, wobei wir davon ausgehen, dass weder q noch $\dot{q}$ an den Randpunkten variiert werden, d.h. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = \delta\dot{q}(t_1) = \delta\dot{q}(t_2) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten (sog. *geodätische Linie*) auf einer Kugel durch einen Großkreisbogen gegeben ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass das Linienelement auf einer Kugeloberfläche vom Radius R durch $\mathrm{d}s = R\sqrt{1 + \sin^2\vartheta\varphi'^2}\,\mathrm{d}\vartheta$ mit $\varphi' = \mathrm{d}\varphi/\,\mathrm{d}\vartheta$ gegeben ist.

6. Tit For Tat (***)



Zwei punktförmige Körper gleicher Masse m bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde reibungsfrei auf einer vertikalen, bzw. um 45° geneigten, Geraden (s. Abb.). Sie sind mit einer idealen Feder mit Federkonstanten k verbunden, die im entspannten Zustand Länge $l = 0$ hat. Es wirken keine weitern Kräfte.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den Variablen y_1 und y_2 auf, den vertikalen Komponenten der Koordinaten der Massenpunkte.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

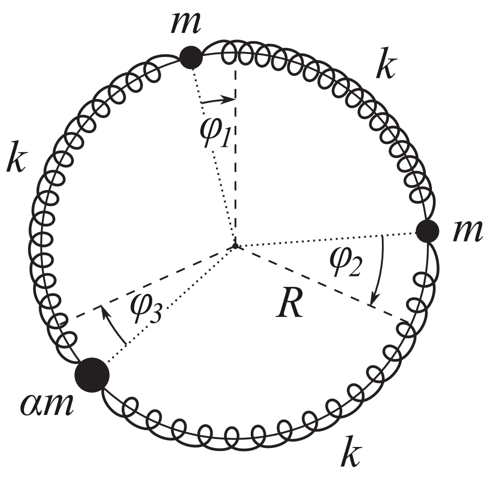
c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage.

d) Es ist nun sinnvoll neue Koordinaten ξ_1 und ξ_2 einzuführen, welche die Auslenkung der Massen aus der Gleichgewichtslage beschreiben. Zeigen Sie dass sich damit die Lagrange-Funktion auf folgende Form vereinfachen lässt:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(2\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2\right)$$

e) Geben Sie die neuen Bewegungsgleichungen in Matrixform an und bestimmen sie die Eigenschwingungen des Systems. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

7. Gefederte Massen auf Ring (**)



Drei Massenpunkte können sich reibungsfrei auf einem Kreisring mit Radius R bewegen und sind durch drei identische Federn mit Federkonstante k miteinander verbunden (s. Abb.). Zwei der Massenpunkte haben die gleiche Masse m, während der dritte die Masse $M = \alpha m$, $\alpha > 0$ hat. Es wirken keine weiteren Kräfte.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System auf. Verwenden Sie als generalisierte Koordinaten die Winkel φ_i, $i = 1, 2, 3$, die als Auslenkungen aus einer durch gleiche Federspannungen bestimmten Lage definiert seien.

b) Stellen Sie daraus die Bewegungsgleichungen für dieses System auf.

c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen aus den Bewegungsgleichungen.

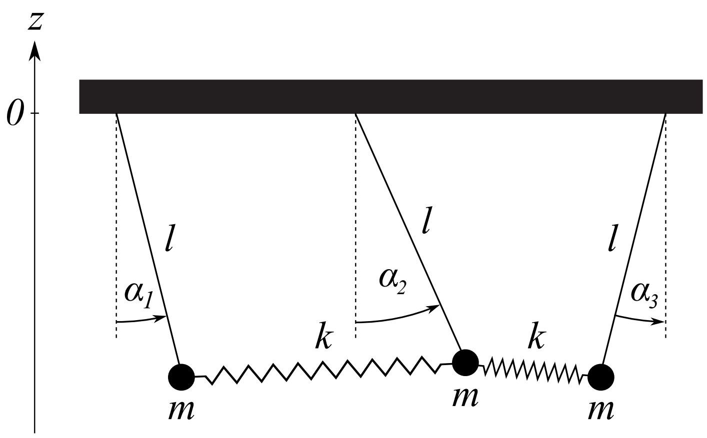
Hinweis: Die charakteristische Gleichung der aus den Bewegungsgleichungen folgenden Matrix mit den noch zu bestimmenden Größen β und λ kann faktorisiert werden gemäß

$$\begin{vmatrix} 2\beta-\lambda & -\beta & -\beta \\ -\beta & 2\beta-\lambda & -\beta \\ -\beta & -\beta & 2\beta-\alpha\lambda \end{vmatrix} = \lambda(3\beta-\lambda)[\alpha\lambda-\beta(\alpha+2)]\,.$$

d) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenschwingungen und interpretieren Sie diese.

e) Welche Symmetrie weist dieses System auf? Welche Erhaltungsgröße gibt es aufgrund dieser Symmetrie? Welche Eigenschwingung ist mit dieser Erhaltungsgröße assoziiert und wie groß ist die zugehörige Eigenfrequenz?

8. Gekoppelte Fadenpendel (***)



Drei gleiche mathematische Pendel (Masse m, Länge l) sind durch zwei ideale Federn derselben Federkonstante k verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde (s. Abb.). Die Länge jeder der unbelasteten Federn ist jeweils gleich dem Abstand der Aufhängungspunkte der zwei durch sie verbundenen Pendel.

a) Formulieren Sie die Lagrange-Funktion im Falle kleiner Auslenkungen.
Hinweis: Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_i^3)$.

b) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.
Hinweis: Die Beziehung $(a+b-x)(a+2b-x)-2b^2=(a-x)(a+3b-x)$ könnte sich als nützlich erweisen.

d) Berechnen Sie die zu den zwei langsamsten Eigenschwingungen gehörenden Eigenvektoren und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

e) Geben Sie die zur schnellsten Schwingungsmode gehörende Eigenschwingung mit kurzer Begründung, aber ohne Rechnung, an.

9. Noether-Theorem (*)

Welche Komponenten des Impulses $\vec{p}$ und Drehimpulses $\vec{L}$ bleiben erhalten, wenn sich ein Massenpunkt im dreidimensionalen Potential bewegt, dessen Äquipotentialflächen durch folgende Fälle vorgegeben sind:

a) unendliche Ebenen parallel zur xz-Ebene,

b) konzentrische Zylinderhülsen mit Zylinderachsen auf der y-Achse,

c) konzentrische Kugeloberflächen,

d) konzentrische gerade Kreiskegel mit identischen Öffnungswinkeln und der x-Achse als Symmetrieachse,

e) konzentrische Ellipsoidoberflächen mit $a = b \neq c$.