Lösung zu Übungsblatt 2

konservative Kräfte, Vielteilchensysteme und ausgedehnte Körper

1. Potential der Gravitationskraft (*)

Die Gravitationskraft eines Massenpunktes m_1 im Koordinatenursprung auf einen zweiten Massenpunkt m_2 mit Ortsvektor $\vec{r}$ beträgt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r. \tag{1}$$

(a) Zeigen sie allgemein, dass eine Kraft der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$ konservativ ist.

(b) Berechnen sie das Potential der Gravitationskraft. Das Potential soll im Unendlichen verschwinden.

Lösung:

(a)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial[zf(r)]}{\partial y} - \frac{\partial[yf(r)]}{\partial z} \\ \frac{\partial[xf(r)]}{\partial z} - \frac{\partial[zf(r)]}{\partial x} \\ \frac{\partial[yf(r)]}{\partial x} - \frac{\partial[xf(r)]}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\begin{pmatrix} z\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial z} \\ x\frac{\partial r}{\partial z} - z\frac{\partial r}{\partial x} \\ y\frac{\partial r}{\partial x} - x\frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\begin{pmatrix} z\frac{y}{r} - y\frac{z}{r} \\ x\frac{z}{r} - z\frac{x}{r} \\ y\frac{x}{r} - x\frac{y}{r} \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

(b) Das Potential $U(r)$ in einem Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ ist in diesem Fall das Linienintegral der Kraft vom Unendlichen zum Punkt P. Da das Linienintegral einer konservativen Kraft wegunabhängig ist, können wir den für die Integration günstigsten Weg wählen. Der günstigste Weg verläuft hier geradlinig, radial nach innen.

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}) - U(\infty) = \int_\infty^{\vec{r}} \vec{\nabla}U(\vec{r}\,')\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}\,' = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,')\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}\,' = \int_\infty^{\vec{r}} \frac{k}{r'^2}\vec{e}_r\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}\,' = \int_\infty^{r} \frac{k}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = -\frac{k}{r} = U(r) \tag{3}$$

2. Fallende Kette (*)

Eine Kette der Länge l und Masse m besteht aus zahllosen sehr kleinen Gliedern. Sie hängt anfangs in Ruhe an der Decke und berürt mit dem unteren Ende eine Waagschale. Zur Zeit $t = 0$ wird sie aus der Ruhelage losgelassen.

(a) Berechnen sie den Impuls $p(t)$ des fallenden Kettenanteiles.

(b) Welche Kraft $F(t)$ wird von der Waage angezeigt?

LÖSUNG:

(a)

$$x(t) = \frac{g}{2}t^2 \rightarrow v(t) = gt \tag{4}$$

Die Masse des fallenden Kettenteiles lautet

$$m(t) = \frac{l - x(t)}{l}m = \frac{l - g/2t^2}{l}m \rightarrow p(t) = m(t)v(t) = m\frac{l - g/2t^2}{l}gt. \tag{5}$$

(b) Die Zeitableitung des Gesamtimpulses der Kette lautet daher

$$\dot{p}(t) = mg - \frac{3mg^2}{2l}t^2. \tag{6}$$

Die externe Kraft $F^{\text{ext}}(t)$ auf die Kette setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft mg und der gesuchten Kraft $F(t)$, die die Waagschale nach oben auf die Kette ausübt. Es gilt

$$mg - \frac{3mg^2}{2l}t^2 = F^{\text{ext}}(t) = mg - F(t) \rightarrow F(t) = \frac{3mg^2}{2l}t^2 \,\text{für}\, 0 \leq t \leq t_{\text{Fall}} = \sqrt{\frac{2l}{g}}. \tag{7}$$

Die Kraft auf die Waagschale w"achst quadratisch in der Zeit bis zum Maximalwert $F_{\max} = 3mg$.

3. SCHWINGUNG VON ZWEI GEKOPPELTEN MASSEN (**)

Vor einer Wand ruhen zwei gleiche Körper mit Masse m auf einem glatten Boden; Gleit- und Haftreibungszahl sind null. Zwischen den Körpern befindet sich eine Feder mit Federkonstante D, die durch einen Faden um die Strecke Δs zusammengedrückt wird. Zur Zeit $t = 0$ wird der Faden durchgeschnitten,

(a) Zu welcher Zeit t_A löst sich Körper 1 von der Wand und wie groß ist dabei die Schwerpunktsgeschwindigkeit?

(b) Wie groß ist die maximale Federdehnung $s_{\max}$ der anschließenden Schwingung?

LÖSUNG:

Die Zeit t_A bis zur Ablösung des Körpers 1 von der Wand ist ein Viertel der Schwingungsperiode, die aus der Experimentalphysik bekannt sein sollte:

$$t_A = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{D}} \tag{8}$$

Bis zu dieser Zeit wird der Körper 2 auf die Geschwindigkeit $v_{\mathrm{I2}}(t_A)$ beschleunigt, die mit dem Energieerhaltungssatz berechnet wird:

$$\frac{D}{2}\Delta s^2 = \frac{m}{2}v_{\mathrm{I2}}^2(t_A) \rightarrow v_{\mathrm{I2}}(t_A) = \sqrt{\frac{D}{m}}\Delta s \tag{9}$$

Wegen der Gleichheit beider Massen ist die Geschwindigkeit des Schwepunktes halb so groß

$$v_S = \sqrt{\frac{D}{m}}\frac{\Delta s}{2}\,\text{für}\, t \geq t_A. \tag{10}$$

(b) Hier bieten sich zwei Lösungsmöglichkeiten an:

1. Möglichkeit: Wir spalten die kinetische Energie in einen Schwerpunktsanteil und einen Relativanteil auf; letzterer ist die Schwingungsenergie:

$$E\frac{D}{2}\Delta s^2 = \frac{2m}{2}v_S^2 + E_{\text{Schwingung}} = \frac{D}{4}\Delta s^2 + E_{\text{Schwingung}} \rightarrow E_{\text{Schwingung}} = \frac{D}{4}\Delta s^2 = \frac{E}{2} \tag{11}$$

Die Energie steckt also zu gleichen Teilen in der Schwerpunktsbewegung und in der Schwingung. Die maximale Federdehnung $s_{\max}$ ergiebt sich aus dem Energieerhaltungssatz:

$$\frac{D}{4}\Delta s^2 = \frac{D}{2}s_{\max}^2 \rightarrow s_{\max} = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

2. Möglichkeit: Wir setzten uns für $t \geq t_A$ in ein Inertialsystem, in dem der Schwerpunkt des Schwingers ruht. Zur Zeit $t = t_A$ ist die Feder entspannt und die Körper haben im Schwerpunktssystem entgegengesetzt gleich große Anfangsgeschwindigkeiten:

$$v_1(t_A) = -v_s = -\sqrt{\frac{D}{m}}\frac{\Delta s}{2} = -v_2(t_A) \tag{13}$$

Danach schwingen die Körper mit gleicher Amplitude A im Gegentakt. Da die Feder in ihrer Mitte, also im Schwerpunkt S des Schwingers ständig ruht, gehört zu jeder Masse nur die halbe Feder der Federkonstante $2D$. Die Amplitude A der beiden Schwingungen ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz, der z.B. für den Körper 1 lautet:

$$\frac{m}{2}v_1^2(t_A) = \frac{D}{8}\Delta s^2 = \frac{2D}{2}A^2 \tag{14}$$

Dabei ist DA^2 die maximale potentielle Energie einer halben Feder. Somit finden wir

$$A = \frac{\Delta s}{\sqrt{8}} \to s_{\max} = 2A = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

4. Abplattung der Galaxien und Sonnensysteme (*)

Die Galaxien sind aus riesigen Gaswolken entstanden, die astronomische Ausdehnungen und einen Drehimpuls $\vec{L}_{\text{ges}}$ hatten. Auf die Gaswolke wirkten keine äußeren Drehmomente.

Erklären sie ganz grob mit dem Drehimpulssatz, warum sich die Gaswolken unter dem Einfluss der Gravitation zu flachen Galaxien entwickelt haben. Für Sonnensysteme gelten die gleichen Erklärungen.

Lösung:

Die Gaswolken zogen sich unter dem Einfluss ihrer Gravitation zusammen. Dabei blieb der Drehimpuls der rotierenden Wolke konstant, so dass die Bahngeschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeiten der Gasteilchen wachsen mussten. Der Zuwachs an kinetischer Energie wurde durch die Arbeit geliefert, die die Gravitationskräfte beim Zusammenziehen leisteten.

Die Kontraktion in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls $\vec{L}_{\text{ges}}$ wird durch die Zentrifugalkräfte bzw. durch die Bedingung $\vec{L}_{\text{ges}} = \text{const.}$ behindert. Hingegen kann die Kontraktion parallel zum Drehimpuls beliebeig weit gehen. Ohne Drehimpuls bleibt von einer Gaswolke nur ein einzelner Stern übrig. Sonnensysteme ohne Drehimpuls haben daher keine Planeten.

5. Zenrifugalrotator (**)

Die vertikale Achse eines Pendels der Länge l wird von einem Elektromotor angetrieben und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.

(a) Stellen sie die Bewegungsgleichung auf.

(b) Zeigen sie durch Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\dot{\theta}$, dass die Funktion

$$I(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}[(l\dot{\theta})^2 - (\omega l \sin\theta)^2] - mgl\cos\theta \tag{16}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Bemerkung: Wenn das negative Vorzeichen in der eckigen Klammer durch ein positives

Vorzeichen ersetzt wird, ergibt sich die Energie E des Rotators. Wegen des Antriebes der vertikalen Achse ist die Energie aber nicht konstant.

(c) Integrieren sie die Bewegungsgleichung (Nur Integral angeben, geschlossene Lösung nicht möglich).

Lösung:

(a) Die Beschleunigung der Masse m in tangentialer Richtung beträgt $l\ddot{\theta}$. Die Gewichtskraft mg und die Zentrifugalkraft $m\omega^2 l \sin\theta$ haben die tangentialen Komponenten $-mg\sin\theta$ und $m\omega^2 l \sin\theta\cos\theta$. Folglich lautet die Bewegungsgleichung

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 l \sin\theta\cos\theta. \tag{17}$$

(b) Wir verwenden einen Trick, der bei der ersten Integration von Bewegungsgleichungen häufig benutzt wird: Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit der ersten Zeitableitung $\dot{\theta}$ der gesuchten Funktion und - in diesem Fall - zusätzlich noch mit der Pendellänge l:

$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta + m\omega^2 l^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m}{2}(l\dot{\theta})^2 - \frac{m}{2}(\omega l\sin\theta)^2 - mgl\cos\theta\right] = 0 \tag{18}$$

Die erste Integration der Bewegungsgleichung ist jetzt sehr einfach und führt auf

$$\frac{m}{2}[(l\dot{\theta})^2 - (\omega l\sin\theta)^2] - mgl\cos\theta = I = \text{const.} \tag{19}$$

Die erste Integration der Bewegungsgleichung führt also auf die Erhaltungsgröße I und wäre überflüssig, wenn die Erhaltungsgröße schon zuvor bekannt gewesen wäre.

(c) Bei der zweiten Integration müssen wir die Erhaltungsgröße I nur nach $\dot{\theta}$ auflösen:

$$\dot{\theta} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{2I}{m} + (\omega l\sin\theta)^2 + 2gl\cos\theta} \tag{20}$$

Bei der Zunahme (Abnahme) von θ gilt das positive (negative) Vorzeichen. Trennung der Variablen führt auf

$$t - t_0 = \pm l \int_{\theta_0}^{\theta(t)} 1/\sqrt{\frac{2I}{m} + (\omega l\sin\theta)^2 + 2gl\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta'. \tag{21}$$

Dieses Integral kann nicht in geschlossener Form gelöst werden, d.h. die Stammfunktion kann nicht mit elementaren Funktionen dargestellt werden. Der Satz über implizite

Funktionen garantiert aber die Existenz und Eindeutigkeit von $\theta(t)$.

6. Energieerhaltung (***)

Beweisen sie die Energieerhaltung für ein System von N Massepunkten bei Anwesenheit von inneren $\vec{F}_{ij}$ und äußeren $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ konservativen Kräften.

Lösung:

Der Energieerhaltungssatz für Mehrteilchensysteme mit konservativen Kräften kann bewiesen werden, indem man die Linienintegrale der N Kräfte

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \Sigma_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \,\text{mit}\, j \neq i \tag{22}$$

berechnet und über die Teilchennummern i summiert:

$$\Sigma_i^N \int\limits_{r_i(t_1)}^{r_i(t_2)} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \,\mathrm{d}\vec{r}_i = \Sigma_i^N \int\limits_{r_i(t_1)}^{r_i(t_2)} \vec{F}_i^{\text{ext}} + \Sigma_j^N \vec{f}_{ij} \,\mathrm{d}\vec{r}_i \,\text{mit}\, j \neq i \tag{23}$$

Mit $\mathrm{d}\vec{r}_i = \vec{v}_i \,\mathrm{d}t$ ergibt sich die linke Seite als Änderung der kinetischen Energie:

$$\Sigma_i^N \int\limits_{t_1}^{t_2} m_i \dot{\vec{v}}_i(t) \cdot \vec{v}_i(t) \,\mathrm{d}t = \Sigma_i^N \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m_i}{2} v_i^2(t) \right) \mathrm{d}t = \Sigma_i^N \left(\frac{m_i}{2} v_i^2(t_2) - \frac{m_i}{2} v_i^2(t_1) \right) = T(t_2) - T(t_1) \tag{24}$$

Die rechte Seite von Gleichung 23 wird wie folgt umgerechnet:

$$\Sigma_i^N \int\limits_{r_i(t_1)}^{r_i(t_2)} \left[-\frac{\partial U_i^{\text{ext}}}{\partial \vec{r}_i} - \Sigma_{j=1, j\neq i}^N \frac{\partial U_{ij}(r_{ij})}{\partial \vec{r}_i} \right] \mathrm{d}\vec{r}_i \tag{25}$$

$$= -\Sigma_i^N [U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i(t_2)) - U_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i(t_1))] - \Sigma_{i,j=1, j\neq i}^N [U_{ij}(r_{ij}(t_2)) - U_{ij}(r_{ij}(t_1))] \tag{26}$$

Daraus folgt der Energieerhaltungssatz für konservative äußere und innere Kräfte:

$$T(t_1) + \Sigma_i^N [U_i^{\text{ext}}(t_1) + \Sigma_{i,j=1, j\neq i}^N U_{ij}(t_1)] = T(t_2) + \Sigma_i^N [U_i^{\text{ext}}((t_2)) + \Sigma_{i,j=1, j\neq i}^N U_{ij}(t_2)] \tag{27}$$

$$T(t_1) + U(t_1) = T(t_2) + U(t_2) \tag{28}$$

Die Summe aus kinetischer Energie sowie äußerer und innerer potentieller Energie ist konstant, wenn die äußeren und die inneren Kräfte konservativ sind.

7. Ausgedehnte Mechanische Körper (***)

(a) Berechnen sie die Masse eines homogenen Ellipsoids mit den Halbachsen a, b und c und der Dichte ρ. Hinweis: Verwenden sie Koordinaten mit der Parametrisierung $\vec{r} = (ax, by, cz)^T$.

(b) Berechnen sie das Potential einer homogenen Kugel mit Radius R und und der Dichte ρ.

(c) Berechnen sie das Potential, entlang der z-Achse, eines homogenen Zylinders mit Radius R, Höhe h und der Dichte ρ.

(d) Berechnen sie die potentielle Energie von zwei Kugeln aus (b), wobei die Mittelpunkte den Abstand A haben sollen ($A > R$).

Hinweise: $\int\limits_{-1}^{1} (a^2 + b^2 - 2abx)^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{ab}[|a-b| - (a+b)]$, $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$, $\int \sqrt{x^2+a^2} = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \operatorname{arsinh}(x/a)]$

Lösung:

(a) Für die angegebene Parametrisierung lautet die Jacobi-Determinante abc.

$$m = \int\limits_V \rho\, \mathrm{d}^3 r = \rho \int\limits_{|\vec{r}|\leq 1} abc\, \mathrm{d}^3 r = abc\rho \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int\limits_0^{1} \mathrm{d}r\, r^2 \sin\theta = \frac{4}{3}\pi abc\rho \tag{29}$$

(b)

$$U(\vec{r}) = -Gm_0 \int \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{r}|}\, \mathrm{d}^3 x = -Gm_0 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \int\limits_0^{R} \frac{s^2 \rho}{\sqrt{s^2 + r^2 - 2rs\cos\theta}}\, \mathrm{d}s \tag{30}$$

$$= -2\pi\rho G m_0 \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int\limits_0^{R} s^2 (s^2 + r^2 - 2rs\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}s = -2\pi\rho G m_0 \int\limits_0^{R} s^2 \frac{-1}{rs}[|r-s| - (r+s)]\, \mathrm{d}s \tag{31}$$

$$= -2\pi\rho G m_0 \int\limits_0^{R} \mathrm{d}s\, s^2 \begin{cases} \frac{2}{r} & r > s \\ \frac{2}{s} & r < s \end{cases} = -4\pi\rho G m_0 \left[\frac{1}{r}\int\limits_0^{r} s^2\, \mathrm{d}s + \int\limits_r^{R} s\, \mathrm{d}s\right] \tag{32}$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{Gm_0}{r} = -\frac{Gmm_0}{r} & r > R \\ -2\pi\rho G m_0((D/2)^2 - r^2/3) & r < R \end{cases} \tag{33}$$

Dabei ist m die Gesamtmasse der Kugel.

(c)

$$U\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_a \end{pmatrix}\right) = -\rho G m_0 \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \frac{s}{\sqrt{s^2\cos^2\phi + s^2\sin^2\phi + (z-z_a)^2}} \,\mathrm{d}s \tag{34}$$

$$= -2\pi\rho G m_0 \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^R \frac{s}{\sqrt{s^2 + (z-z_a)^2}} \,\mathrm{d}s = -2\pi\rho G m_0 \int_0^h \sqrt{R^2 + (z-z_a)^2} \,\mathrm{d}z \tag{35}$$

$$= -\pi\rho G m_0 [h\sqrt{R^2 + (h-z_a)^2} + R^2 \operatorname{arsinh}(h/R)] \tag{36}$$

(d) Die Kugel 1 befinde sich im Koordinatenursprung und die Kugel 2 um den Vektror $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$ auf der z-Achse verschoben. Die Integration über x kann mit dem Ergebnis von (b) leicht durchgeführt werden.

$$U_{12} = -G \int_{V_2} \mathrm{d} \int_{V_1} \frac{\rho_1(\vec{x})\rho_2(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \,\mathrm{d}^3x \,\mathrm{d}^3y = G\rho \int_{V_2} \frac{m}{|\vec{y}|} \,\mathrm{d}^3y \tag{37}$$

Nun verschieben wir das Koordinatensystem um $-\vec{A}$, so dass Kugel 2 nun im Koordinatenursprung liegt und wir die bekannten Integrationsgrenzen benutzen können. Es gilt $\vec{y} \to \vec{y}' - \vec{A}$ und mit $|\vec{y}'| = r$

$$|\vec{y}' - \vec{A}| = \sqrt{r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + (r\cos\theta - A)^2} \tag{38}$$

$$= \sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - 2rA\cos\theta + A^2} = \sqrt{r^2 - 2rA\cos\theta + A^2} \tag{39}$$

$$\to U_{12} = G\rho m \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 2rA\cos\theta + A^2}} \,\mathrm{d}r = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - 2rAu + A^2}} \,\mathrm{d}r = \tag{40}$$

$$2\pi\rho \frac{Gm}{A} \int_0^R r[-\sqrt{r^2 - 2rA + A^2} + \sqrt{r^2 + 2rA + A^2}] \,\mathrm{d}r = 2\pi\rho \frac{Gm}{A} \int_0^R r[-\sqrt{(r-A)^2} + \sqrt{(r+A)^2}] \,\mathrm{d}r \tag{41}$$

$$= 2\pi\rho \frac{Gm}{A} \int_0^R r[-|r-A| + |r+A|] \,\mathrm{d}r = 2\pi\rho \frac{Gm}{A} \int_0^R r[-(A-r) + (r+A)] \,\mathrm{d}r \tag{42}$$

$$= 2\pi\rho\frac{Gm}{A}\int_0^R 2r^2\ \mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\frac{Gm}{A} = \frac{Gm^2}{A} \tag{43}$$

Die Kugeln der Gesamtmasse m haben also dieselbe potentielle Energie wie zwei Punktmassen der Masse m und Abstand A.