ÜBUNGSBLATT 2

konservative Kräfte, Vielteilchensysteme und ausgedehnte Körper

1. Potential der Gravitationskraft (*)

Die Gravitationskraft eines Massenpunktes m_1 im Koordinatenursprung auf einen zweiten Massenpunkt m_2 mit Ortsvektor $\vec{r}$ beträgt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r. \tag{1}$$

(a) Zeigen sie allgemein, dass eine Kraft der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$ konservativ ist.

(b) Berechnen sie das Potential der Gravitationskraft. Das Potential soll im Unendlichen verschwinden.

2. Fallende Kette (*)

Eine Kette der Länge l und Masse m besteht aus zahllosen sehr kleinen Gliedern. Sie hängt anfangs in Ruhe an der Decke und berürt mit dem unteren Ende eine Waagschale. Zur Zeit $t = 0$ wird sie aus der Ruhelage losgelassen.

(a) Berechnen sie den Impuls $p(t)$ des fallenden Kettenanteiles.

(b) Welche Kraft $F(t)$ wird von der Waage angezeigt?

3. Schwingung von zwei gekoppelten Massen (**)

Vor einer Wand ruhen zwei gleiche Körper mit Masse m auf einem glatten Boden; Gleit- und Haftreibungszahl sind null. Zwischen den Körpern befindet sich eine Feder mit Federkonstante D, die durch einen Faden um die Strecke Δs zusammengedrückt wird. Zur Zeit $t = 0$ wird der Faden durchgeschnitten,

(a) Zu welcher Zeit t_A löst sich Körper 1 von der Wand und wie groß ist dabei die Schwerpunktsgeschwindigkeit?

(b) Wie groß ist die maximale Federdehnung s_{max} der anschließenden Schwingung?

4. Abplattung der Galaxien und Sonnensysteme (*)

Die Galaxien sind aus riesigen Gaswolken entstanden, die astronomische Ausdehnungen und einen Drehimpuls $\vec{L}_{\text{ges}}$ hatten. Auf die Gaswolke wirkten keine äußeren Drehmomente.

Erklären sie ganz grob mit dem Drehimpulssatz, warum sich die Gaswolken unter dem Einfluss der Gravitation zu flachen Galaxien entwickelt haben. Für Sonnensysteme gelten die gleichen Erklärungen.

5. Zenrifugalrotator (**)

Die vertikale Achse eines Pendels der Länge l wird von einem Elektromotor angetrieben und rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.

(a) Stellen sie die Bewegungsgleichung auf.

(b) Zeigen sie durch Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\dot{\theta}$, dass die Funktion

$$I(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}[(l\dot{\theta})^2 - (\omega l \sin\theta)^2] - mgl\cos\theta \tag{2}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Bemerkung: Wenn das negative Vorzeichen in der eckigen Klammer durch ein positives Vorzeichen ersetzt wird, ergibt sich die Energie E des Rotators. Wegen des Antriebes der vertikalen Achse ist die Energie aber nicht konstant.

(c) Integrieren sie die Bewegungsgleichung (Nur Integral angeben, geschlossene Lösung nicht möglich).

6. Energieerhaltung (***)

Beweisen sie die Energieerhaltung für ein System von N Massepunkten bei Anwesenheit von inneren $\vec{F}_{ij}$ und äußeren $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ konservativen Kräften.

7. Ausgedehnte Mechanische Körper (***)

(a) Berechnen sie die Masse eines homogenen Ellipsoids mit den Halbachsen a, b und c und der Dichte ρ. Hinweis: Verwenden sie Koordinaten mit der Parametrisierung
$\vec{r} = (ax, by, cz)^T$.

(b) Berechnen sie das Potential einer homogenen Kugel mit Radius R und und der Dichte ρ.

(c) Berechnen sie das Potential, entlang der z-Achse, eines homogenen Zylinders mit Radius R, Höhe h und der Dichte ρ.

(d) Berechnen sie die potentielle Energie von zwei Kugeln aus (b), wobei die Mittelpunkte den Abstand A haben sollen ($A > R$).

Hinweise: $\int_{-1}^{1} (a^2 + b^2 - 2abx)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{ab}[|a - b| - (a + b)]$, $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$,
$\int \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \mathrm{arsinh}(x/a)]$