# Lösung zu Übungsblatt 1

Grundlagen der Newton'schen Mechanik, Zweiteilchensysteme

## 1. Vektoranalysis (*)

**(a)** Der Gradient eines skalaren Feldes $f(\vec{r})$ ist laut Definition ein Vektorfeld:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zeigen sie:

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

**(b)** Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{r})$ ist laut Definition ein skalares Feld:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{3}$$

Zeigen sie:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \tag{4}$$

**(c)** Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{r})$ ist laut Definition ein Vektorfeld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(\vec{r}) \\ f_2(\vec{r}) \\ f_3(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial 3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Zeigen sie:

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \tag{6}$$

### Lösung:

**(a)**

$$\vec{\nabla} r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r \tag{7}$$

**(b)**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \tag{8}$$

**(c)**

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial 3} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

## 2. Bahnkurve in Kugelkoordinaten (**)

Die Parametrisierung für Kugelkoordinaten lautet $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t) \\ r(t)\sin\theta(t)\sin\phi(t) \\ r(t)\cos\theta(t) \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen sie die Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ (in dieser Reihenfolge liegt ein rechtshändiges Koordinatensystem vor).

**(b)** Berechnen sie die Zeitableitungen der Basisvektoren und drücken sie diese durch $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

**(c)** Berechnen sie die Geschwindigkeit für die Bahnkurve $\vec{r} = r\vec{e}_r$.

**(d)** Berechnen sie die Beschleunigung.

## Lösung:

**(a)** Die Basisvektoren erhält man indem man die Parametrisierung nach den entsprechenden Variablen ableitet und auf 1 normiert.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \ , \ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = 1 \rightarrow \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \ , \ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| = r \rightarrow \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = r\sin\theta \rightarrow \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Alternative:

Der radiale Basisvektor ist offensichtlich

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Der Basisvektor des Polarwinkels $\phi$ ist derselbe wie bei ebenen Polarkoordinaten (ohne z-Komponente)

$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Den Basisvektor des Azimuthalwinkels $\theta$ erhält man aus dem Kreuzprodukt von $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\phi$. Da für ein rechthändiges Koordinatensystem die Reihenfolge $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ ist, gilt

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{15}$$

**(b)**

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} \dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi \\ \dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi \\ -\dot\theta\sin\theta \end{pmatrix} = \dot\theta\vec{e}_\theta + \dot\phi\sin\theta\vec{e}_\phi \tag{16}$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \begin{pmatrix} -\dot\theta\sin\theta\cos\phi - \dot\phi\cos\theta\sin\phi \\ -\dot\theta\sin\theta\sin\phi + \dot\phi\cos\theta\cos\phi \\ -\dot\theta\cos\theta \end{pmatrix} = -\dot\theta\vec{e}_r + \dot\phi\cos\theta\vec{e}_\phi \tag{17}$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\dot\phi\cos\phi \\ -\dot\phi\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot\phi\sin\theta\vec{e}_r - \dot\phi\cos\theta\vec{e}_\phi \tag{18}$$

**(c)**

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot\theta\vec{e}_\theta + r\dot\phi\sin\theta\vec{e}_\phi \tag{19}$$

**(d)**

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot\theta\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot\phi\sin\theta\vec{e}_\phi \\ &+\dot{r}\dot\theta\vec{e}_\theta + r\ddot\theta\vec{e}_\theta - r\dot\theta^2\vec{e}_r + r\dot\theta\dot\phi\cos\theta\vec{e}_\phi \\ &+\dot{r}\dot\phi\sin\theta\vec{e}_\phi + r\ddot\phi\sin\theta\vec{e}_\phi + r\dot\theta\dot\phi\cos\vec{e}_\phi - r\dot\phi^2\sin^2\theta\vec{e}_r - r\ddot\phi\sin\theta\cos\theta\vec{e}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta)\vec{e}_r + (r\ddot\theta + 2\dot{r}\dot\theta - r\ddot\phi\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + (r\ddot\phi\sin\theta + 2\dot{r}\dot\phi\sin\theta + 2r\dot\theta\dot\phi\cos\theta)\vec{e}_\phi \end{aligned}$$

## 3. Pendel mit zwei Massenpunkten (*)

Ein im Koordinatenursprung aufghängtes Pendel schwingt in der xz-Ebene und besteht aus einer masselosen Stange, an der die Massen $m_1$ und $m_2$ in den Abständen $l_1$ und $l_2$ vom Drehpunkt befestigt sind. Wie groß ist die Schwingungsdauer $T$ für kleine Ausschläge?

## Lösung:

Auf die beiden Massen wirken die Schwerkräfte $m_i g$ ($\parallel$ z-Achse) und die Stangenkraft. Letztere ist parralel zu den Ortsvektoren der Massen und erzeugt daher kein Drehmoment.

$$\vec{M} = \Sigma_i \vec{m}_i = \Sigma_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \Sigma_i \begin{pmatrix} l_i \sin\phi \\ 0 \\ -l_i \cos\phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i g \end{pmatrix} = \Sigma_i m_i l_i g \begin{pmatrix} 0 \\ sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\vec{L} = \Sigma_i \vec{l}_i = \Sigma_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \Sigma_i \begin{pmatrix} l_i \sin\phi \\ 0 \\ -l_i \cos\phi \end{pmatrix} \times m_i \begin{pmatrix} l_i \dot{\phi} \cos\phi \\ 0 \\ l_i \dot{\phi} \sin\phi \end{pmatrix} = -\Sigma_i m_i l_i^2 \dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Die Summen gehen jeweils von 1 bis 2. Die Gleichung $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ führt nun auf die Differentialgleichung

$$\ddot{\phi} + \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} g \sin\phi = 0. \tag{22}$$

Für kleine Winkel $\phi$ ist $\sin\phi \approx \phi$, so dass die Differentialgleichung für kleine Ausschläge näherungsweise lautet

$$\ddot{\phi} + \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} g \phi = 0. \tag{23}$$

Der Ansatz $\phi(t) = A\cos(\omega t - \delta)$ erweist sich als richtig, wenn gilt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} g} \tag{24}$$

Alternativ kann man auch $\omega$ direkt aus der Differentialgleichung ablesen, da es sich um die Gleichung eines harmonischen Oszillators handelt, die die Form $\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0$ hat. Es ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}}. \tag{25}$$

## 4. Lineares Potential (*)

Untersuchen sie qualitativ das effektive Potential einer Bewegung im linearen Potential $U(r) = \gamma r$ (Ein Teilchen im Kreiskegel hat ein solches Potential). Welche Bahntypen können auftreten?

## Lösung:

$$V_{\text{eff}}(r) = \gamma r + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{26}$$

hat an der Stelle $r_0 = \left(\frac{l^2}{\mu\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$ das absolute Minimum

$$V_{\text{eff}}^{\text{min}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\gamma^2 l^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{27}$$

Zwei Bahntypen sind zu unterscheiden:

**(a)** $E = E_1 > V_{\text{eff}}^{\text{min}}$: Die Bahn ist finit und beschreibt einen gebundenen Zustand; Das Teilchen läuft zwischen zwei Umkehrpunkten $r_1$ und $r_2$ hin und her. Allerdings können wir nicht feststellen, ob die Bewegung offen oder geschlossen ist, ein ellipsenförmiges oder andersartiges Aussehen hat. Um Aussagen darüber treffen zu können, müsste man das Integral

$$\Phi - \Phi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{l}{r'^2\sqrt{2\mu(E-\gamma r) - \frac{l^2}{r'^2}}}\,\mathrm{d}r' \tag{28}$$

berechnen.

**(b)** $E = E_2 = V_{\text{eff}}^{\text{min}}$: Es liegt eine Kreisbewegung vor mit $r = r_0$.

## 5. Stabilität von Kreisbahnen (*)

Kreisbahnen sind in allen anziehenden, rotationssymmetrischen Zentralkraftfeldern möglich. Von großer Wichtigkeit - z.B. für Planeten- und Satellitenbahnen - ist die Stabilität von Kreisbahnen. Wir wollen untersuchen, welche Bedingung ein allgemeines Potential

$U(r)$ erfüllen muss, damit Kreisbahnen stabil sind, also durch kleine Auslenkungen oder kleine Störkräfte nicht wesentlich geändert werden.

**(a)** Suchen sie die Bedingung für die Stabilität von Kreisbahnen in einem beliebigen, rotationssymmetrischen Zentralkraftfeld $U(r)$, mit Hilfe des effektiven Potentials.

**(b)** Für welche Exponenten $n$ hat das Potential $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ stabile Kreisbahnen?

**(c)** Für welche Parameter $r_0$ hat das Potential $U(r) = -\frac{\alpha}{r}\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}$ stabile Kreisbahnen?

## Lösung:

**(a)** Der Radius $R$ der Kreisbahnen ergibt sich aus der Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff(r)}}}{\mathrm{d}r}|_{r=R} = \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}|_{r=R} - \frac{l^2}{\mu R^3} = 0. \tag{29}$$

Die Kreisbahn ist stabil, wenn $V_{\mathrm{eff}}$ an der Stelle $R$ ein Minimum hat, also

$$\frac{\mathrm{d}^2 V_{\mathrm{eff(r)}}}{\mathrm{d}r^2}|_{r=R} = \frac{\mathrm{d}^2 U(r)}{\mathrm{d}r^2}|_{r=R} + \frac{3}{R}\frac{l^2}{\mu R^3} > 0. \tag{30}$$

Mit Gleichung 29 finden wir dann die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}^2 U(r)}{\mathrm{d}r^2}|_{r=R} + \frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}|_{r=R} > 0 \tag{31}$$

für stabile Kreisbahnen. Die Bedingung für instabile Kreisbahnen lautet

$$\frac{\mathrm{d}^2 U(r)}{\mathrm{d}r^2}|_{r=R} + \frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}|_{r=R} < 0. \tag{32}$$

**(b)** Aus Gleichung 31 folgt die Bedingung $n < 2$.

**(c)** Gleichung 31 führt auf die Bedingung

$$r_0^2 + Rr_0 - R^2 > 0 \,\text{bzw.}\, \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 - \frac{R}{r_0} - 1 < 0 \rightarrow \frac{R}{r_0} < 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \tag{33}$$

## 6. Sturz ins Zentrum (***)

**(a)** Unter welchen Bedingungen kann eine Masse das Zentrum des Feldes $U(r) = -\alpha r^{-n}$ mit Drehimpuls ungleich Null erreichen? Ist die Zahl der Umläufe beim Sturz ins Zentrum endlich oder unendlich?

**(b)** Weisen sie nach, dass die für den Fall ins Zentrum benötigte Zeit stets endlich ist und Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit immer gegen Unendlich gehen.

## Lösung:

**(a)** Das anziehende Potential muss das Zentrifugalpotential überwinden. Deswegen muss gelten

1. $n > 2$ und $\alpha > 0$ oder
2. $n = 2$ und $\alpha > \frac{l^2}{2\mu}$ oder zumindest
3. $n = 2$ und $\alpha = \frac{l^2}{2\mu}$.

Es gilt

$$\Phi - \Phi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{l}{r'^2\sqrt{2\mu(E + \alpha r^{-n}) - \frac{l^2}{r'^2}}} \, \mathrm{d}r'. \tag{34}$$

Entscheidend für die Zahl der Umläufe ist der Bereich kleiner $r$.

**1.** Für $n > 2$ wird $E$ und der Term mit $l^2$ im Integral vernachlässigt. Dann ergibt sich

$$\Phi \approx \sqrt{\frac{2}{\mu\alpha}} \frac{l}{2-n} r^{-1+\frac{n}{2}} \to r(\phi) = \left(\sqrt{\frac{\mu\alpha}{2}} \frac{2-n}{l} \phi\right)^{\frac{1}{-1+n/2}}. \tag{35}$$

Die Zahl der umläufe ist endlich, da $r(\phi) = 0$ möglich ist.

**2.** Für $n = 2$ und $\alpha > \frac{l^2}{2\mu}$ wird $E$ im Integral vernachlässigt.

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{l}{\sqrt{2\mu\alpha - l^2}} \ln \frac{r}{r_0} \to r(\phi) = r_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{2\mu\alpha}{l^2} - 1}(\phi - \phi_0)\right] \tag{36}$$

Die Zahl der Umläufe ist unendlich.

**3.** Für $n = 2$ und $\alpha = \frac{l^2}{2m}$ gilt exakt

$$\Phi - \Phi_0 = -\frac{l}{\sqrt{2\mu E}}(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}) \to r(\phi) = \frac{1}{1/r_0 - \sqrt{2\mu E}/l^2(\phi - \phi_0)}. \tag{37}$$

Das Teilchen läuft auf einer Spirale $\phi(r) \propto \frac{1}{r}$ ins Zentrum und benötigt unendlich viele Umläufe.

**(b)** Es gilt

$$t = -\int_{r_0}^{0} \frac{l}{\sqrt{2\mu(E + \alpha r^{-n}) - \frac{l^2}{r'^2}}} \, \mathrm{d}r'. \tag{38}$$

$t$ ist endlich, wenn das Integral an der oberen Grenze 0 konvergiert.

**1.** Für $n > 2$ wird $E$ und der Term mit $l^2$ im Integral vernachlässigt. Dann ergibt sich

$$\rightarrow t \approx -\sqrt{\frac{\mu}{2\alpha}} \int_{r_0}^{0} r^{\frac{n}{2}} \, \mathrm{d}r < \infty \tag{39}$$

**2.** Für $n = 2$ und $\alpha > \frac{l^2}{2\mu}$ wird $E$ im Integral vernachlässigt.

$$t = 1/\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(\alpha - \frac{l^2}{2\mu}\right)} \int_{r_0}^{0} r \, \mathrm{d}r < 0 \tag{40}$$

**3.** Für $n = 2$ und $\alpha = \frac{l^2}{2m}$ gilt exakt

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2E}} r_0. \tag{41}$$

Demnach benötigt ein Teilchen, das in ein Zentralkraftzentrum fällt, stets nur endliche Zeit. Wegen

$$\frac{\mu}{2} v^2 = E - V \text{ und } \dot{\phi} = \frac{l}{\mu r^2} \tag{42}$$

gehen Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit in jedem Fall gegen unendlich.

## 7. Absturz auf die Erde (**)

Ein Asteroid oder ein anderer Himmelskörper mit Masse $m_A \ll m_{\text{Erde}}$ fliegt auf einer Hyperbelbahn in den Anziehungsbereich der Erde. Dabei soll die Relativgeschwindigkeit zur Erde in großer Entfernung von der Erde gleich $v_0$ sein. Welchen Stoßparameter $b_{\min}$ zur Erde darf der Asteroid nicht unterschreiten, wenn er nicht mit der Erde kollidieren soll?

Hinweis: Das Bezugssystem der Erde soll für den relativ kurzen Zeitraum, in dem der Asteroid in Erdnähe ist, als Inertialsystem angesehen werden. Die Anziehungskräfte der Sonne und der anderen Planeten auf den Asteroid sind zu vernachlässigen. Die für die Rechnung benötigten Parameter sind die Gravitationskonstante $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$, der Radius der Erde $R_{\text{Erde}} \approx 6370\,\mathrm{km}$ und die Masse der Erde $m_{\text{Erde}} \approx 5,98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

## Lösung:

Der Asteroid stürzt auf die Erde, wenn der Perihelabstand $r_{\min} \leq R_{\text{Erde}}$ ist. Wir setzen

$r_{\min} \leq R_{\text{Erde}}$.

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\epsilon} = \frac{m_A v_0^2 s_{\min}^2}{k} / \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m_A^2 v_0^4 s_{\min}^2}{k^2}}\right) = R_{\text{Erde}} \tag{43}$$

mit $k = G m_A m_{\text{Erde}} \approx 3,99 \cdot 10^{14} m_A \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$. Es ergibt sich

$$s_{\min} = R_{\text{Erde}} \sqrt{1 + \frac{2k}{m_A v_0^2 R_{\text{Erde}}}} \approx R_{\text{Erde}} \sqrt{1 + 1,25 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{v_0^2} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \tag{44}$$

Der minimale Stoßparameter $s_{\min}$ ist umso kleiner, je größer $v_0$ ist. Für $v_0 \to \infty$ geht $s_{\min}$ wie erwartet gegen $R_{\text{Erde}}$.

## 8. Das dritte Kepler'sche Gesetz (**)

Beweisen sie das 3. Kepler'sche Gesetz, das besagt, dass bei Planetenbewegungen die Quadrate der Umlaufzeiten $T$ näherungsweise der dritten Potenz der großen Halbachsen $a$ proportional sind. **Lösung:**

Für die Flächengeschwindigkeit $\dot{F} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \frac{l}{2\mu}$ gilt

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = F = \frac{l}{2\mu} T \tag{45}$$

Die Fläche F einer Ellipse lautet

$$F = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2} = \pi a^2 \sqrt{-\frac{2El^2}{\mu k^2}} = \frac{\pi l}{\sqrt{\mu k}} a^{\frac{3}{2}} \tag{46}$$

$$\to T = \frac{2\mu}{l} F = \frac{2\mu\pi}{\mu k} a^{\frac{3}{2}} \tag{47}$$

Wie ersetzen die reduzierte Masse $\mu$ durch die Planetenmasse $m_p$ und die Sonnenmasse $m_S$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{k} = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m_S m_p}{m_S + m_p} = \frac{4\pi^2}{G} / (1 + \frac{m_p}{m_S}. \tag{48}$$

Dabei ist a die große Halbachse der Ellipse, die der Differenzvector $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_S$ durchläuft.

Die große Halbachse $a_p$ der Ellipse, die der Planet durchläuft, lautet

$$a_p = \frac{m_S}{m_p + m_S} a. \tag{49}$$

$$\rightarrow \frac{T^2}{a_p^3} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(m_p + m_S)^2}{m_S^3} = \frac{4\pi^2}{G m_S} \left(1 + \frac{m_p}{m_S}\right)^2 \tag{50}$$

Für unser Sonnensystem ist $\frac{m_p}{m_S} \ll 1$, so dass $\frac{T^2}{a_p^3}$ für alle Planeten nahezu gleich ist (Für die Erde ist $\frac{m_p}{m_S} \approx 1/300000$; für Jupiter, den schwersten Planeten, ist $\frac{m_p}{m_S} \approx 1/1000$).

## 9. Streuung im Zentralkraftfeld (***)

Berechnen sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ für die Streuung im abstoßenden Zentralkraftfeld $U(r) = \frac{\beta}{r^2}$ mit $\beta > 0$.

Hinweis: $\int 1/\sqrt{a^2 - (bx)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{bx}{a}\right)$

## Lösung:

Der Perihelabstand $r_{\min}$ ergibt sich durch folgende Energiebetrachtung:

$$E = \frac{\mu}{2} v_\infty^2 = \frac{\beta}{r_{\min}^2} + \frac{\mu}{2} r_{\min}^2 \dot{\phi}_p^2 = \frac{\beta}{r_{\min}^2} + \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} \tag{51}$$

$$\rightarrow r_{\min}^2 = \frac{\beta + l^2/(2\mu)}{E} = \frac{\beta + \mu/2 b^2 v_\infty^2}{E} = \frac{\beta}{E} + b^2 \rightarrow r_{\min} = b\sqrt{1 + \frac{\beta}{E b^2}} \tag{52}$$

Der Streuwinkel in Abhängigkeit von $l^2 = 2\mu E b^2$ beträgt

$$\theta = \pi - 2\Phi_0 = \pi - 2\frac{l}{\mu} \int_{r_{\min}}^{\infty} 1/\left(r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right]}\right) \mathrm{d}r. \tag{53}$$

Wir substituieren $u = \frac{1}{r}$:

$$\pi - 2b \int_0^{u_p} \sqrt{1 - u^2\left(\frac{\beta}{E} + b^2\right)}\ \mathrm{d}u = \pi - 2b/\sqrt{\frac{\beta}{E} + b^2} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\beta}{E} + b^2}\, u\right) \Big|_0^{u_p} = \pi\left(1 - b/\sqrt{\frac{\beta}{E} + b^2}\right) \tag{54}$$

$$\rightarrow b = \frac{\beta}{E}\frac{\pi-\theta}{\sqrt{\theta(2\pi-\theta)}} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{\beta\pi^2}{E}\frac{\pi-\theta}{\sin\theta[\theta(2\pi-\theta)]^2} \tag{55}$$