Übungsblatt 1

Grundlagen der Newton'schen Mechanik, Zweiteilchensysteme

1. Vektoranalysis (*)

(a) Der Gradient eines skalaren Feldes $f(\vec{r})$ ist laut Definition ein Vektorfeld:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zeigen sie:

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

(b) Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{r})$ ist laut Definition ein skalares Feld:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{3}$$

Zeigen sie:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \tag{4}$$

(c) Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{r})$ ist laut Definition ein Vektorfeld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(\vec{r}) \\ f_2(\vec{r}) \\ f_3(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial 3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Zeigen sie:

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \tag{6}$$

2. Bahnkurve in Kugelkoordinaten (**)

Die Parametrisierung für Kugelkoordinaten lautet $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t) \\ r(t)\sin\theta(t)\sin\phi(t) \\ r(t)\cos\theta(t) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen sie die Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ (in dieser Reihenfolge liegt ein rechtshändiges Koordinatensystem vor).

(b) Berechnen sie die Zeitableitungen der Basisvektoren und drücken sie diese durch $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

(c) Berechnen sie die Geschwindigkeit für die Bahnkurve $\vec{r} = r\vec{e}_r$.

(d) Berechnen sie die Beschleunigung.

3. Pendel mit zwei Massenpunkten (*)

Ein im Koordinatenursprung aufghängtes Pendel schwingt in der xz-Ebene und besteht aus einer masselosen Stange, an der die Massen m_1 und m_2 in den Abständen l_1 und l_2 vom Drehpunkt befestigt sind. Wie groß ist die Schwingungsdauer T für kleine Ausschläge?

4. Lineares Potential (*)

Untersuchen sie qualitativ das effektive Potential einer Bewegung im linearen Potential $U(r) = \gamma r$ (Ein Teilchen im Kreiskegel hat ein solches Potential). Welche Bahntypen können auftreten?

5. Stabilität von Kreisbahnen (*)

Kreisbahnen sind in allen anziehenden, rotationssymmetrischen Zentralkraftfeldern möglich. Von großer Wichtigkeit - z.B. für Planeten- und Satellitenbahnen - ist die Stabilität von Kreisbahnen. Wir wollen untersuchen, welche Bedingung ein allgemeines Potential $U(r)$ erfüllen muss, damit Kreisbahnen stabil sind, also durch kleine Auslenkungen oder kleine Störkräfte nicht wesentlich geändert werden.

(a) Suchen sie die Bedingung für die Stabilität von Kreisbahnen in einem beliebigen, rotationssymmetrischen Zentralkraftfeld $U(r)$, mit Hilfe des effektiven Potentials.

(b) Für welche Exponenten n hat das Potential $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ stabile Kreisbahnen?

(c) Für welche Parameter r_0 hat das Potential $U(r) = -\frac{\alpha}{r}\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}$ stabile Kreisbahnen?

6. Sturz ins Zentrum (***)

(a) Unter welchen Bedingungen kann eine Masse das Zentrum des Feldes $U(r) = -\alpha r^{-n}$ mit Drehimpuls ungleich Null erreichen? Ist die Zahl der Umläufe beim Sturz ins Zentrum endlich oder unendlich?

(b) Weisen sie nach, dass die für den Fall ins Zentrum benötigte Zeit stets endlich ist und Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit immer gegen Unendlich gehen.

7. Absturz auf die Erde (**)

Ein Asteroid oder ein anderer Himmelskörper mit Masse $m_A \ll m_{\text{Erde}}$ fliegt auf einer Hyperbelbahn in den Anziehungsbereich der Erde. Dabei soll die Relativgeschwindigkeit zur Erde in großer Entfernung von der Erde gleich v_0 sein. Welchen Stoßparameter b_{min} zur Erde darf der Asteroid nicht unterschreiten, wenn er nicht mit der Erde kollidieren soll?

Hinweis: Das Bezugssystem der Erde soll für den relativ kurzen Zeitraum, in dem der Asteroid in Erdnähe ist, als Inertialsystem angesehen werden. Die Anziehungskräfte der Sonne und der anderen Planeten auf den Asteroid sind zu vernachlässigen. Die für die Rechnung benötigten Parameter sind die Gravitationskonstante $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$, der Radius der Erde $R_{\text{Erde}} \approx 6370\,\mathrm{km}$ und die Masse der Erde $m_{\text{Erde}} \approx 5,98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

8. Das dritte Kepler'sche Gesetz (**)

Beweisen sie das 3. Kepler'sche Gesetz, das besagt, dass bei Planetenbewegungen die Quadrate der Umlaufzeiten T näherungsweise der dritten Potenz der großen Halbachsen a proportional sind.

9. Streuung im Zentralkraftfeld (***)

Berechnen sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ für die Streuung im abstoßenden Zentralkraftfeld $U(r) = \frac{\beta}{r^2}$ mit $\beta > 0$.

Hinweis: $\int 1/\sqrt{a^2 - (bx)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{bx}{a}\right)$