# Ferienkurs Experimentalphysik 4
# 2012

## Lösung zur Übung 4

**1. Atomare Übergänge I**

$N_0$ Atome befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem angeregten Zustand $k$ mit Energie $E_k$. Die Abregung in den Grundzustand erfolgt durch Emission eines Photons. Die Wahrscheinlichkeit dieses Übergangs pro Zeiteinheit sei $\Gamma/\hbar$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt $t > 0$ ein Atom im angeregten Zustand zu finden? Wie sieht allgemein die Wellenfunktion des angeregten Zustands für Zeiten $t > 0$ aus?
*Hinweis:* Die allgemeine, zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung ist
$\Psi(\vec{r}, t) = c_k(t)\phi_k(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega_k t}$

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Zeitabhängigen Anteils der Wellenfunktion um das Frequenzspektrum zu erhalten. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Übergangswahrscheinlichkeit und voller Halbwertsbreite des Spektrums an.

c) Bei der Abregung eines Atoms seien nun zwei Prozesse mit verschiedenen Endzuständen möglich. Die beiden Übergangsraten seien $(\Gamma_1/\hbar)$ und $(\Gamma_2/\hbar)$. Wie berechnet sich die Lebensdauer für den Ausgangszustand?

d) Nehmen Sie nun an, dass zur Entvölkerung eines Zustandes nicht nur mehrere spontane Abregungsübergänge beitragen, sondern auch inelastische Stöße, die mit der Rate $r$ stattfinden und das System in den Endzustand $g$ versetzen. Wie ändert sich die Lebensdauer?

**Lösung**:

a) Analog zur Herleitung des Zerfallsgesetzes erhalten wir die Anzahl $N$ an Atomen, welche sich zum Zeitpunkt $t > 0$ im angeregten Zustand k befinden:

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\Gamma t/\hbar) \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Atom ist somit $p = \exp(-\Gamma t/\hbar)$. Verwendet man die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung mit $\omega_k = E_k/\hbar$ so ist die Wahrscheinlichkeit das Atom zum Zeitpunkt $t > 0$ im Zustand $k$ zu finden ist gegeben durch $|c_k(t)|^2 = \exp(-\Gamma t/\hbar)$, z.B. $c_k(t) = \exp(-\Gamma t/2\hbar)$. Die Wellenfunktion für Zustand k ergibt sich also zu

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Phi_k(\vec{r}) \cdot \exp\left[(-\Gamma t/2\hbar - i\omega_k) \cdot t\right] \tag{2}$$

b) Die Wellenfunktion aus Teilaufgabe a lässt sich schreiben als

$$\Psi(\vec{r},t) = \Phi_k(\vec{r}) \cdot \Theta(t) \tag{3}$$

mit $\Theta(t) = \exp\left[(-\Gamma t/2\hbar - i\omega_k) \cdot t\right]$. Die Energie und damit auch die Frequenz des Zustandes sind also nicht mehr unendlich scharf. Stattdessen besitzen sie eine Verteilung $g(\omega)$ mit einer gewissen Breite. Diese können wir mit Hilfe der Fourier-Transformation berechnen.

$$g(\omega) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) \cdot e^{i\omega t} dt \tag{4}$$

Für Zeiten $t < 0$ ist $\Theta(t) = 0$ und damit:

$$g(\omega) \approx \int_{0}^{\infty} \exp\left[(-\Gamma t/2\hbar - i\omega_k + i\omega) \cdot t\right] dt = \frac{1}{-\Gamma/2\hbar - i(\omega_k - \omega)} \tag{5}$$

Das Spektrum erhalten wir dann mit Hilfe des Betragsquadrates

$$|g(\omega)|^2 \approx \frac{1}{\Gamma^2 t/4\hbar^2 + (\omega_k - \omega)^2} \tag{6}$$

Funktionen dieser Form sind bekannt als Lorentz- oder auch Cauchy-Verteilungen. Im Vergleich zu einer Normalverteilung hat die Cauchy-Verteilung einen schmaleren Peak fällt aber an den Flanken langsamer gegen 0 ab. Der Wert am Maximum beträgt in unserem Fall $4\hbar^2/\Gamma^2$ (abgesehen von einer Proportionalitätskonstante). Die Hälfte $2\hbar^2/\Gamma^2$ erhalten wir wenn $\omega - \omega_k = \pm\Gamma/2\hbar$. Damit ist die volle Halbwertsbreite (FWHM) $\Gamma/\hbar$ gerade gleich der Zerfallswahrscheinlichkeit. Man bezeichnet $\Gamma$ als die *natürliche Linienbreite*. Dieses Ergebnis ist konsistent mit der Unschärferelation. Es gilt $\Gamma \leq \Delta E$ und $\tau \leq \Delta t$ mit der Lebensdauer $\tau$ des Zustandes. Zusammen mit $\Gamma/\hbar = 1/\tau$ folgt $\hbar \leq \Delta E \Delta t$.

c) Für den Übergang aus dem Ausgangszustand $i$ in den Endzustand $f$ gilt:

$$dN_{i\to f} = -\Gamma_{if}/\hbar \cdot N_i \cdot dt \tag{7}$$

Da beide Prozesse unabhängig voneinander sind können die Zerfallswahrscheinlichkeiten einfach addiert werden:

$$dN_{i\to f} = -\sum_f \Gamma_{if}/\hbar \cdot N_i \cdot dt \tag{8}$$

Entsprechend gilt dann analog zum Zerfall in einen einzelnen Kanal die Lebensdauer $\tau_i$:

$$\tau_i = \frac{\hbar}{\sum_f \Gamma_{if}} \tag{9}$$

d) Da die Anzahl der Abregungsvorgänge durch inelastische Stöße proportional zur Anzahl der angeregten Atome ist, gilt:

$$dN_{i\to g} = -\Gamma_{ig}/\hbar \cdot N_i \cdot dt = -r \cdot N_i \cdot dt \tag{10}$$

Entsprechend ist tritt im Ausdruck für die Lebensdauer ein weiterer Term auf:

$$\tau_i = \frac{\hbar}{\sum_f \Gamma_{if} + r \cdot \hbar} \tag{11}$$

**2. Atomare Übergänge II**

a) Zeigen Sie, dass $\frac{\Delta\omega}{\omega_{ik}} = \frac{A_{ik}}{\omega_{ik}}$ gilt. (Hier ist $A_{ik}$ der sogenannte Einsteinkoeffizient, der die Übergangswahrscheinlichkeit pro Sekunde eines spontanen Übergangs vom Zustand $i$ in den Zustand $k$ beschreibt. $\omega_{ik}$ ist die Frequenz des Übergangs und $\Delta\omega$ die Frequenzbreite des FWHM.)

b) Zeigen Sie am Beispiel des $2p \to 1s$ Übergangs des Wasserstoffatoms, dass die relative Linienbreite $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ für Ein-Elektronen Systeme von der Größenordnung $\alpha^3$ ($\alpha$: Feinstrukturkonstante) ist. Berechnen Sie dazu zunächst den Einsteinkoeffizient $A_{ik}$, drücken Sie diesen dann geschickt durch $\alpha^3$ aus und verwenden Sie den Zusammenhang aus a).
*Hinweise:* $R_{10}(r) = 2 \cdot a_B^{-3/2} \cdot e^{-r/a_B}$ und $R_{21}(r) = \frac{r}{\sqrt{24}} \cdot a_B^{-5/2} \cdot e^{-r/2a_B}$
*Das zu lösende Integral ist vom Typ:*
$\int_0^\infty x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}}$ mit $(n = 0, 1, 2, \ldots, a > 0)$

c) Das Wasserstoffgas befinde sich nun in einem mit Flüssigstickstoff gekühlten Kryostaten ($T = 77$K). Berechnen Sie die Intensität $I(\omega)$ und die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ bei der die Intensität auf $\frac{1}{2}$ abgefallen ist. Berechnen Sie auch $\frac{\Delta\omega}{\omega_{kj}}$. Diese Verbreiterung des Frequenzspektrums, das durch die Bewegung der Atome zustande kommt wird Dopplerverbreiterung genannt. Hat diese Dopplerverbreiterung Einfluss auf die Zerfallswahrscheinlichkeit?

**Lösung**:

a) Es gilt (siehe oben) $\Gamma \leq \Delta E$ und $\Gamma/\hbar = 1\tau = A_{ik}$. Daraus folgt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{ik}} = \frac{\hbar\Delta\omega}{\hbar\omega_{ik}} = \frac{\Delta E}{\hbar\omega_{ik}} = \frac{\Gamma}{\hbar\omega_{ik}} = \frac{A_{ik}}{\omega_{ik}} \tag{12}$$

b) Für elektrische Dipolübergänge benötigen wir $\Delta l = \pm 1$ und $\Delta m = 0, \pm 1$:

$$\begin{aligned} 1s &\to n = 1, l = 0, m = 0 \\ 2p &\to n = 2, l = 1, m = 0, \pm 1 \end{aligned}$$

Der Übergang $2p \to 1s$ erfüllt somit immer die Auswahlregeln.

Wir verwenden nun wieder die Dipolnäherung um die Wahrscheinlichkeiten für Übergänge zu beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit eines spontanen Übergangs von einem Zustand $k$ mit Energie $E_k$ in einen Zustand $j$ mit Energie $E_j$ wird durch den Einsteinkoeffizienten $A_{kj}$ beschrieben.

$$A_{kj} = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0}\frac{1}{\hbar c^3}\omega_{kj}^3 \left|\langle j|\vec{r}|k\rangle\right|^2 \tag{13}$$

mit $\omega_{kj} = (E_k - E_j)/\hbar$ und $\langle j|\vec{r}|k\rangle$ dem Matrixelement des Ortsoperators $\vec{r}$. Zunächst berechnen wir das Matrixelement:

$$\begin{aligned}
\langle j|\vec{r}|k\rangle &= \int_0^\infty R_{21}(r) r R_{10} r^2 dr \int Y_{1m}^\star(\vartheta,\varphi)\hat{r}Y_{00}(\vartheta,\varphi)d\Omega \\
&\approx \int_0^\infty R_{21}(r)R_{10}r^3 dr = \frac{2}{\sqrt{24}}a_B^{-4}\int_0^\infty r^4 e^{-r3/2a_B}dr \\
&\approx \frac{2}{\sqrt{24}}a_B^{-4}\frac{4!}{(3/2)^5}a_B^5 = 1.29a_B \\
&\approx a_B
\end{aligned}$$

Das Matrixelement für zwei Zustände im Wasserstoffatom ist allgemein von der Größenordnung des Bohrschen Atomradius $a_B$.
Nun berechnen wir die Freqeunz des Übergangs und drücken das Ergebnis durch $\alpha$ aus. Die Frequenz des Übergangs ist gegeben durch

$$\omega_{kj} = (E_k - E_j)/\hbar$$

wobei für die Energie gilt

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\omega_{kj} &= (E_{2p} - E_{1s})/\hbar = -\frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2}\cdot\left(\frac{1}{4} - 1\right) \\
&= \frac{3}{8}\frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2} = \frac{3}{8}\frac{\alpha_C}{a_B} \approx \frac{\alpha_C}{a_B}
\end{aligned}$$

Mit $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar}{me^2}$ und $\alpha_C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ kann das dann oben eingesetzt werden und man erhält

$$\begin{aligned}
A_{kj} &\approx \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0}\frac{1}{\hbar c^3}\left(\frac{\alpha_C}{a_B}\right)^2\omega_{kj}^3 a_B^2 \\
&= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\alpha^2\omega_{kj} = \alpha^3\omega_{kj}
\end{aligned}$$

c) Die Wellenlänge des von einem bewegten Atom emittierten Licht ist durch den Doppler-Effekt verschoben. Da sich auch die Atome eines heißen Gases noch nicht relativistisch schnell bewegen, kann die Verschiebung als

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) \tag{14}$$

geschrieben werden, wobei $v_x$ die longitudinale Komponente der Bewegung ist. Da $v_x << c$ ergibt sich die Frequenzverschiebung zu

$$\nu = \nu \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \tag{15}$$

Die Maxwellverteilung der Geschwindigkeiten der Gas-Atome ist

$$dN(v_x) = N_0 \exp\left(-\frac{Mv_x^2}{2k_BT}\right) dv_x \tag{16}$$

wobei $M$ die Atomasse ist. Durch Einsetzen der obigen Gleichungen erhält man die Intensität pro Frequenzintervall:

$$I(\omega) = C \exp\left[-\frac{Mc^2}{2k_BT}\left(\frac{\omega - \omega_{kj}}{\omega_{kj}}\right)\right] \tag{17}$$

Die Halbwertsbreite beträgt

$$\Delta\omega = \frac{2\omega_{kj}}{c}\sqrt{\frac{2kTln2}{M}} \approx \frac{2\alpha}{a_B}\sqrt{\frac{2kTln2}{M}} \tag{18}$$

Einsetzen der Konstanten liefert folgende Ergebnisse:

$$\Delta\omega = 2.59 \cdot 10^{11}\text{Hz} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_{kj}} = 6.26 \cdot 10^{-6}$$

**3. Lebensdauer und Linienbreite**

a) Die mittlere Lebensdauer des H(2p)-Zustands beträgt $\tau = 1.6$ns. Berechnen Sie die natürliche Breite für die Lyman-$\alpha$-Linie ($2p \to 1s$) und vergleichen Sie diese mit der Doppler-Breite bei Zimmertemperatur.
*Hinweis: Die Intensitätsverteilung um die Frequenz $\nu_0$ aufgrund des Dopplereffekts ist gegeben durch*

$$I(\nu_0) = I_0 \exp\left(-\frac{mc^2(\nu - \nu_0)^2}{2\nu_0^2 k_BT}\right)$$

b) Vergleichen Sie die sich aus 1. ergebenden Breiten der Linie ($2p \to 1s$) mit der Hyperfeinstrukturaufspaltung (HFS) des Wasserstoffgrundzustands, die durch die Wellenlänge $\lambda = 21.1$cm zwischen den beiden F-Zuständen charakterisiert

ist. Welche Temperatur muß erreicht werden, damit die HFS von einem idealen Spektrometer aufgelöst werden kann?
*Hinweis: Vernachlässigen Sie hierbei die Hyperfeinstruktur der 2p Energieniveaus*

**Lösung**:

a) Der Zusammenhang zwischen der natürlichen Breite der Lyman-$\alpha$-Linie und der Lebensdauer des H(2p)-Zustandes ist gegeben durch

$$\Delta\nu_{\text{nat}} = \frac{1}{2\pi\tau} \approx 100\text{MHz}$$

Aus der Intensitätsverteilung des Dopplereffekts ergibt sich

$$\Delta\nu_{\text{dopp}} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{8\ln 2}\frac{k_B T}{m} \tag{19}$$

$$\approx 30.1\text{GHz} = 301 \cdot \Delta\nu_{\text{nat}} \tag{20}$$

b) Beim Übergang von 2p zu 1s, können wir bei hinreichend guter Auflösung 2 Linien erkennen, jeweils für $F = 0$ und $F = 1$ der HFS des 1s Energieniveaus. Damit die Hyperfeinstrukturaufspaltung aufgelöst werden kann, muß die Dopplerverbreiterung kleiner sein als der Abstand zwischen den beiden Linien (21cm). $\nu_0 = \nu(2p - 1s)$, was man leicht mit der üblichen Rydbergformel bestimmen kann:

$$\frac{\nu_0}{c}\sqrt{8\ln 2\frac{k_B T}{m}} \leq \Delta\nu \tag{21}$$

$$\rightarrow T \leq \frac{mc^2}{8\ln 2 k_B}\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2 \tag{22}$$

$$\approx 0.65\text{K} \tag{23}$$

## 4. Matrixelemente

a) Der $2^1P_1$-Übergang in Helium hat eine Lebensdauer von $\tau = 0.5 \cdot 10^{-9}$s. Wie ist das Verzweigungsverhältnis zwischen dem (2p-1s)- und dem (2p-2s)-Übergang, wenn Sie annehmen, dass die beiden Übergänge das gleiche Matrixelement haben?
*Hinweis:* $E_{\text{2p2s}} = 0.602\text{eV}$ *und* $E_{\text{2p1s}} = 21.07\text{eV}$

b) Wie groß müsste das Verhältnis der beiden Matrixelemente sein, damit beide Übergänge gleich stark sind?

c) Wie würde sich die Lebensdauer verändern, wenn der (2p-1s)-Übergang verboten wäre?

**Lösung**:

a) Aus $A_{2p} = A_{2p2s} + A_{2p1s} = 1/\tau$ und $|\langle 2p|\vec{r}|2s|^2 = |\langle 2p|\vec{r}|1s|^2 = |\langle|\vec{r}|\rangle|^2$ folgt

$$\frac{1}{\tau} = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0}\frac{1}{\hbar^4 c^3}\left(E_{2p2s}^3 + E_{2p1s}^3\right)|\langle|\vec{r}|\rangle|^2 \tag{24}$$

$$\rightarrow |\langle|\vec{r}|\rangle|^2 = \frac{1}{\tau}\frac{3\pi\epsilon_0}{e^2}\hbar^4 c^3 \frac{1}{E_{2p2s}^3 + E_{2p1s}^3} \tag{25}$$

Daraus folgt

$$A_{2p2s} = \frac{1}{\tau}\frac{E_{2p2s}^3}{E_{2p2s}^3 + E_{2p1s}^3} \tag{26}$$

$$A_{2p1s} = \frac{1}{\tau}\frac{E_{2p1s}^3}{E_{2p2s}^3 + E_{2p1s}^3} \tag{27}$$

Damit kann das Verhältnis berechnet werden:

$$\frac{A_{2p2s}}{A_{2p}} = \frac{E_{2p2s}^3}{E_{2p2s}^3 + E_{2p1s}^3} = 2.3 \cdot 10^{-3}\% \tag{28}$$

$$\frac{A_{2p1s}}{A_{2p}} = \frac{E_{2p1s}^3}{E_{2p2s}^3 + E_{2p1s}^3} = 99.9977\% \tag{29}$$

b) Damit die Verzweigungsverhältnisse gleich stark sind, müssen die Übergangswahrscheinlichkeiten gleich groß sein. Setzt man diese gleich, folgt

$$\frac{e^2}{3\pi\epsilon_0}\frac{1}{\hbar^4 c^3}E_{2p2s}^3\,|\langle 2p|\vec{r}|2s\rangle|^2 = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0}\frac{1}{\hbar^4 c^3}E_{2p1s}^3\,|\langle 2p|\vec{r}|1s\rangle|^2 \tag{30}$$

$$\rightarrow \frac{|\langle 2p|\vec{r}|2s\rangle|}{|\langle 2p|\vec{r}|1s\rangle|} = \frac{E_{2p2s}^{3/2}}{E_{2p1s}^{3/2}} \approx 207.1 \tag{31}$$

Damit der 2p2s-Übergang genauso wahrscheinlich ist wie der 2p1s-Übergang, muss dessen Matrixelement also ungefähr 200-mal grösser sein.

c) Wenn der (2p-1s)-Übergang verboten ist, gilt

$$\tau_{neu} = \frac{1}{A_{2p2s}} \quad \text{und} \quad A_{2p2s} = \frac{1}{\tau}\frac{E_{2p2s}^3}{E_{2p2s}^3 + E_{2p1s}^3}$$

woraus folgt, dass

$$\tau_{neu} = \tau\frac{E_{2p2s}^3 + E_{2p1s}^3}{E_{2p2s}^3} \approx 2.1 \cdot 10^{-5}\text{s}$$

d.h. der Zustand wäre metastabil.

**5. Übergänge im Wasserstoffatom**

Ein Wasserstoffatom befindet sich im angeregten Zustand $2p$ und geht durch spontane Emission eines Photons in den Grundzustand $1s$ über.

a) Berechnen Sie den Einsteinkoeffizienten für diesen Übergang für den Fall eines linear polarisierten Photons.
*Hinweise:* $\Psi_{nlm_l}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi)$,

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}}\mathrm{e}^{-r/a_0}, \quad R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{5/2}} r\mathrm{e}^{-r/(2a_0)},$$
$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta,$$
$$\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^n \mathrm{e}^{-\alpha r} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

b) Die mittlere Lebensdauer des $2p$-Zustands beträgt $\tau = 1.6$ ns. Berechnen Sie die natürliche Breite für die Lyman-$\alpha$-Linie ($2p \to 1s$) und vergleichen Sie diese mit der Doppler-Breite bei Zimmertemperatur.

c) Vergleichen Sie die sich aus b) ergebenden Breiten der Lyman-$\alpha$-Linie ($2p \to 1s$) mit der Hyperfeinstrukturaufspaltung (HFS) des Wasserstoffgrundzustandes, die durch die Wellenlänge $\lambda = 21.1$ cm zwischen den beiden $F$-Zuständen charakterisiert ist. Welche Temperatur muss erreicht werden, damit die HFS von einem idealen Spektrometer aufgelöst werden kann?
Hinweis: Vernachlässigen Sie hierbei die Hyperfeinstruktur der $2p$ Energieniveaus

d) Wie groß sind Übergangswahrscheinlichkeit und natürliche Linienbreite des Übergangs $3s \to 2p$ im Wasserstoffatom, wenn die Lebensdauer der Zustände $\tau(3s) = 23$ ns und $\tau(2p) = 2.1$ $\mu$s betragen?

**Lösung**

a) Die Übergangswahrscheinlichkeit ist gemäß der Vorlesung gegeben durch

$$A_{ik} = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega_{ik}^3}{\varepsilon_0 c^3 h}\,|\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ik}|^2\,.$$

Der $2p$-Zustand besitzt drei entartete $m$-Komponenten ($m = 0, \pm 1$), da es sich jedoch laut Aufgabenstellung hier um ein linear polarisiertes Photon handelt, können wir uns auf $m = 0$ beschränken.
Zunächst berechnen wir die einzelnen Komponenten des Matrixelements

$$|\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ik}|^2 = (\mathcal{M}_{ik})_x^2 + (\mathcal{M}_{ik})_y^2 + (\mathcal{M}_{ik})_z^2$$

mit Hilfe von Kugelkoordinaten.

Man erhält

$$(\mathcal{M}_{ik})_x = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r\, r^3 R_{10}(r) R_{21}(r) \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin\varphi}_{=0} \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin^2\vartheta Y_{00}(\vartheta,\varphi) Y_{10}(\vartheta,\varphi) = 0$$

$$(\mathcal{M}_{ik})_y = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r\, r^3 R_{10}(r) R_{21}(r) \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cos\varphi}_{=0} \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin^2\vartheta Y_{00}(\vartheta,\varphi) Y_{10}(\vartheta,\varphi) = 0$$

$$(\mathcal{M}_{ik})_z = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}r\, r^3 R_{10}(r) R_{21}(r) \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta Y_{00}(\vartheta,\varphi) Y_{10}(\vartheta,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}a_0^4} \underbrace{\int\limits_0^\infty \mathrm{d}r\, r^4 \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\frac{r}{a_0}}}_{=4!(2a_0/3)^5} \underbrace{\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}_{=2/3} = \frac{2^{15/2}}{3^5} a_0$$

Wir benötigen nun nur noch die Kreisfrequenz $\omega_{ik}$ des emittierten Photons, welche sich mit Hilfe der Balmerformel für $n = 1$ und $m = 2$

$$E = \hbar\omega = \mathrm{Ry}^* \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{3}{4}\mathrm{Ry}^* \;\Rightarrow\; \omega = 2\pi \cdot 2.47 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

berechnen lässt (Feinstruktur etc. kann hier vernachlässigt werden). Für die Übergangswahrscheinlichkeit erhalten wir letztendlich

$$A_{ik} = \frac{2^9}{3^8} \frac{e^2 a_0^2}{\pi\varepsilon_0 \hbar^4 c^3} \mathrm{Ry}^{*3} = 6.25 \cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}.$$

b) Der Zusammenhang zwischen der natürlichen Breite der Lyman-$\alpha$-Linie und der Lebensdauer $\tau$ des $2p$-Zustandes ist gegeben durch

$$\Delta\nu_{\mathrm{nat}} = \frac{1}{2\pi\tau} = 100\ \mathrm{MHz}.$$

Für die Doppler-Verbreiterung ergibt sich gemäß der Formel aus der Vorlesung bei $T = 293$ K und der Frequenz $\nu_0$ die in a) berechnet wurde

$$\Delta\nu_{\mathrm{D}} = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{8 \ln 2 k_{\mathrm{B}} T}{m_{\mathrm{H}}}} = 30.1\ \mathrm{GHz} \approx 300 \cdot \Delta\nu_{\mathrm{nat}}.$$

c) Beim Übergang $2p \to 1s$, können wir bei hinreichend guter Auflösung zwei Linien erkennen, jeweils für $F = 0$ und $F = 1$ der HFS des $1s$ Energieniveaus. Damit die HFS aufgelöst werden kann, muss die Doppler-Verbreiterung kleiner sein als der Abstand zwischen den beiden Linien.

$$\frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{8\ln 2 k_\mathrm{B} T}{m_\mathrm{H}}} \leq \Delta\nu \quad \Rightarrow \quad T \leq \frac{m_\mathrm{H} c^2}{8 \ln 2 k_\mathrm{B}} \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2 = 0.66\ \mathrm{K}.$$

d) Der $3s$-Zustand kann nur in den $2p$-Zustand zerfallen. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Übergang

$$A_{ik} = \frac{1}{\tau(3s)} = 4.3 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Die natürliche Linienbreite ist

$$\Delta\nu_\mathrm{nat} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau(3s)} + \frac{1}{\tau(2p)}\right) = 7\ \mathrm{MHz}.$$