Ferienkurs Experimentalphysik 4
2012

Übung 4

1. Atomare Übergänge I

N_0 Atome befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem angeregten Zustand k mit Energie E_k. Die Abregung in den Grundzustand erfolgt durch Emission eines Photons. Die Wahrscheinlichkeit dieses Übergangs pro Zeiteinheit sei $\Gamma/\hbar$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt $t > 0$ ein Atom im angeregten Zustand zu finden? Wie sieht allgemein die Wellenfunktion des angeregten Zustands für Zeiten $t > 0$ aus?
Hinweis: Die allgemeine, zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung ist
$$\Psi(\vec{r},t) = c_k(t)\phi_k(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega_k t}$$

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Zeitabhängigen Anteils der Wellenfunktion um das Frequenzspektrum zu erhalten. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Übergangswahrscheinlichkeit und voller Halbwertsbreite des Spektrums an.

c) Bei der Abregung eines Atoms seien nun zwei Prozesse mit verschiedenen Endzuständen möglich. Die beiden Übergangsraten seien $(\Gamma_1/\hbar)$ und $(\Gamma_2/\hbar)$. Wie berechnet sich die Lebensdauer für den Ausgangszustand?

d) Nehmen Sie nun an, dass zur Entvölkerung eines Zustandes nicht nur mehrere spontane Abregungsübergänge beitragen, sondern auch inelastische Stöße, die mit der Rate r stattfinden und das System in den Endzustand g versetzen. Wie ändert sich die Lebensdauer?

2. Atomare Übergänge II

a) Zeigen Sie, dass $\frac{\Delta\omega}{\omega_{ik}} = \frac{A_{ik}}{\omega_{ik}}$ gilt. (Hier ist A_{ik} der sogenannte Einsteinkoeffizient, der die Übergangswahrscheinlichkeit pro Sekunde eines spontanen Übergangs vom Zustand i in den Zustand k beschreibt. ω_{ik} ist die Frequenz des Übergangs und $\Delta\omega$ die Frequenzbreite des FWHM.)

b) Zeigen Sie am Beispiel des $2p \to 1s$ Übergangs des Wasserstoffatoms, dass die relative Linienbreite $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ für Ein-Elektronen Systeme von der Größenordnung α^3 (α: Feinstrukturkonstante) ist. Berechnen Sie dazu zunächst den Einsteinkoeffizient A_{ik}, drücken Sie diesen dann geschickt durch α^3 aus und verwenden Sie den Zusammenhang aus a).
Hinweise: $R_{10}(r) = 2 \cdot a_B^{-3/2} \cdot e^{-r/a_B}$ und $R_{21}(r) = \frac{r}{\sqrt{24}} \cdot a_B^{-5/2} \cdot e^{-r/2a_B}$
Das zu lösende Integral ist vom Typ:
$\int_0^\infty x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}}$ mit $(n = 0, 1, 2, \ldots, a > 0)$

c) Das Wasserstoffgas befinde sich nun in einem mit Flüssigstickstoff gekühlten Kryostaten ($T = 77$K). Berechnen Sie die Intensität $I(\omega)$ und die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ bei der die Intensität auf $\frac{1}{2}$ abgefallen ist. Berechnen Sie auch $\frac{\Delta\omega}{\omega_{kj}}$. Diese Verbreiterung des Frequenzspektrums, das durch die Bewegung der Atome zustande kommt wird Dopplerverbreiterung genannt. Hat diese Dopplerverbreiterung Einfluss auf die Zerfallswahrscheinlichkeit?

3. Lebensdauer und Linienbreite

a) Die mittlere Lebensdauer des H(2p)-Zustands beträgt $\tau = 1.6$ns. Berechnen Sie die natürliche Breite für die Lyman-α-Linie ($2p \rightarrow 1s$) und vergleichen Sie diese mit der Doppler-Breite bei Zimmertemperatur.
Hinweis: Die Intensitätsverteilung um die Frequenz ν_0 aufgrund des Dopplereffekts ist gegeben durch

$$I(\nu_0) = I_0 \exp\left(-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2\nu_0^2 k_B T}\right)$$

b) Vergleichen Sie die sich aus 1. ergebenden Breiten der Linie ($2p \rightarrow 1s$) mit der Hyperfeinstrukturaufspaltung (HFS) des Wasserstoffgrundzustands, die durch die Wellenlänge $\lambda = 21.1$cm zwischen den beiden F-Zuständen charakterisiert ist. Welche Temperatur muß erreicht werden, damit die HFS von einem idealen Spektrometer aufgelöst werden kann?
Hinweis: Vernachlässigen Sie hierbei die Hyperfeinstruktur der 2p Energieniveaus

4. Matrixelemente

a) Der 2^1P_1-Übergang in Helium hat eine Lebensdauer von $\tau = 0.5 \cdot 10^{-9}$s. Wie ist das Verzweigungsverhältnis zwischen dem (2p-1s)- und dem (2p-2s)-Übergang, wenn Sie annehmen, dass die beiden Übergänge das gleiche Matrixelement haben?
Hinweis: $E_{\mathrm{2p2s}} = 0.602$eV *und* $E_{\mathrm{2p1s}} = 21.07$eV

b) Wie groß müsste das Verhältnis der beiden Matrixelemente sein, damit beide Übergänge gleich stark sind?

c) Wie würde sich die Lebensdauer verändern, wenn der (2p-1s)-Übergang verboten wäre?

5. Übergänge im Wasserstoffatom

Ein Wasserstoffatom befindet sich im angeregten Zustand $2p$ und geht durch spontane Emission eines Photons in den Grundzustand $1s$ über.

a) Berechnen Sie den Einsteinkoeffizienten für diesen Übergang für den Fall eines linear polarisierten Photons.
Hinweise: $\Psi_{nlm_l}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi)$,

$$R_{10}(r) = \tfrac{2}{a_0^{3/2}} \mathrm{e}^{-r/a_0}, \quad R_{21}(r) = \tfrac{1}{2\sqrt{6} a_0^{5/2}} r \mathrm{e}^{-r/(2a_0)},$$

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \tfrac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}} \cos\vartheta,$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^n \mathrm{e}^{-\alpha r} = \tfrac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

b) Die mittlere Lebensdauer des $2p$-Zustands beträgt $\tau = 1.6$ ns. Berechnen Sie die natürliche Breite für die Lyman-α-Linie ($2p \to 1s$) und vergleichen Sie diese mit der Doppler-Breite bei Zimmertemperatur.

c) Vergleichen Sie die sich aus b) ergebenden Breiten der Lyman-α-Linie ($2p \to 1s$) mit der Hyperfeinstrukturaufspaltung (HFS) des Wasserstoffgrundzustandes, die durch die Wellenlänge $\lambda = 21.1$ cm zwischen den beiden F-Zuständen charakterisiert ist. Welche Temperatur muss erreicht werden, damit die HFS von einem idealen Spektrometer aufgelöst werden kann?
Hinweis: Vernachlässigen Sie hierbei die Hyperfeinstruktur der $2p$ Energieniveaus

d) Wie groß sind Übergangswahrscheinlichkeit und natürliche Linienbreite des Übergangs $3s \to 2p$ im Wasserstoffatom, wenn die Lebensdauer der Zustände $\tau(3s) = 23$ ns und $\tau(2p) = 2.1$ μs betragen?