Ferienkurs Experimentalphysik 4
2012

Lösung zur Übung 2

1. Ermitteln Sie für $l = 1$

   a) den Betrag des Drehimpulses $|\vec{L}|$

   b) die möglichen Werte von m_l

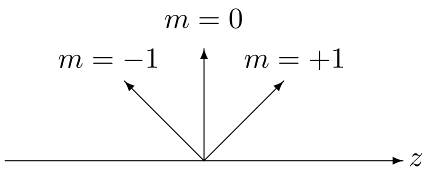
   c) Zeichnen Sie ein maßstabsgerechtes Vektordiagramm, aus dem die möglichen Orientierungen von $\vec{L}$ relativ zur z-Achse hervorgeht

Lösung:

a) Nach Definition ist der Betrag des Drehimpulses $|\vec{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Für $l = 1$ ist der Betrag daher $\sqrt{2}\hbar$.

b) Die Quantenzahl m läuft in ganzzahligen Schritten von $-l$ bis $+l$. Somit kann $m = -1, 0, +1$ sein.

c) Die drei möglichen Vektoren $\vec{L}$ sind:



Jeder der Vektoren hat die Länge $\sqrt{2}\hbar$, und die z-Komponenten sind $-\hbar, 0$ und $+\hbar$. Die Winkel zur z-Achse sind $135°, 90°$ und $45°$.

2. Ermitteln Sie für einen Zustand mit $l = 2$

   a) das Betragsquadrat L^2 des Drehimpulses

   b) den Maximalwert von L_z^2

   c) den kleinstmöglichen Wert von $L_x^2 + L_y^2$

Lösung:

a)
$$|L|^2 = \left(\hbar\sqrt{l(l+1)}\right)^2 = 6\hbar^2 \tag{1}$$

b)
$$L_z^2 = (m\hbar)^2 = m^2\hbar^2 = 4\hbar^2 \tag{2}$$

c) Es ist

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 = l(l+1)\hbar^2 \tag{3}$$

Daraus folgt

$$L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2 = l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 = (6 - m^2)\hbar^2 \tag{4}$$

Dann hat $L_x^2 + L_y^2$ den minimalen Wert wenn m maximal ist, also bei $m = 2$:

$$(L_x^2 + L_y^2)_{min} = (6 - 2^2)\hbar^2 = 2\hbar^2 \tag{5}$$

3. Berechnen Sie für den Grundzustand des Wasserstoffatoms die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Interval $\Delta r = 0.03 a_0$ anzutreffen, bei

   a) $r = a_0$

   b) $r = 2a_0$

Lösung:
Wenn sich der Radius nur wenig ändert, kann die Wahrscheinlichkeitsdichte $W(r) = |\Psi|^2$ als konstant angenommen werden. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Bereich $\Delta r = 0.03a_0$ zu finden etwa gleich $W(r)\Delta r$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Grundzustand des Wasserstoffatoms ist

$$W(r) = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{\frac{-2r}{a_0}} \tag{6}$$

a) Bei $r = a_0$ ist

$$W(r)\Delta r = \frac{4a_0^2}{a_0^3} e^{-2} \cdot (0.03a_0) = 4(0.03)e^{-2} = 0.0162 \tag{7}$$

b) Bei $r = 2a_0$ ist

$$W(r)\Delta r = \frac{16a_0^2}{a_0^3} e^{-4} \cdot (0.03a_0) = 16(0.03)e^{-4} = 0.00879 \tag{8}$$

4. Die Funktion für die radiale Wahrscheinlichkeitsverteilung bei einem Ein-Elektron-Atom im Grundzustand kann geschrieben werden als $W(r) = Cr^2 e^{\frac{-2Zr}{a_0}}$, wobei C eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass $W(r)$ bei $r = a_0/Z$ maximal ist.

Lösung:
Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung tritt bei dem Radius r auf, für den $dW(r)/dr = 0$ ist. Es gilt

$$\frac{dW(r)}{dr} = C\left[2re^{\frac{2Zr}{a_0}} + r^2\left(\frac{-2Z}{a_0}\right)e^{\frac{2Zr}{a_0}}\right] = C\left(\frac{-2Zr}{a_0}\right)e^{\frac{2Zr}{a_0}}\left(\frac{a_0}{Z} - r\right) \tag{9}$$

Also liegt das Maximum bei Radius $r = a_0/Z$. Bei $r = 0$ ist zwar ebenfalls $dW(r)/dr = 0$, aber auch $W(r) = 0$, so daß das gesuchte Maximum nicht im Ursprung liegen kann.

5. Zeigen Sie, dass für die Hauptquantenzahl n im Wasserstoffatom die Anzahl der möglichen Zustände gleich $2n^2$ ist.

Lösung:
Für gegebenes n kann l folgende Werte haben: $l = 0, 1, 2, ..., n-1$. Für jede Quantenzahl l kann $m = -l, -l+1, ..., l-1, l$ sein. Das ergibt insgesamt $2l+1$ Zustände. Ausserdem kann jedes Elektron entweder $m_s = +1/2$ oder $-1/2$ haben, so dass es für jedes l insgesamt $2(2l+1)$ Zustände gibt. Damit ist die Gesamtzahl aller Zustände

$$\begin{aligned} N &= \sum_{0}^{n-1} (2l+1) \\ &= 2\{1+3+5+\ldots+[2(n-1)+1]\} \\ &= 2(1+3+5+\ldots+2n-1) \\ &= 2(1+2+3+\ldots+n) + 2(1+2+3+\ldots+(n-1)) \end{aligned}$$

Mit $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ folgt sofort $N = 2n^2$.

6. Die potentielle Energie eines magnetischen Moments $\vec{\mu}$ in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ ist $E_pot = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

   a) Berechnen Sie die Energiedifferenz zwische den beiden möglichen orientierungen eines Elektrons im Magnetfeld $B = 1.2\text{T}$

   b) Wenn dieses Elektron mit Photonen beschossen wird, deren Energie gleich dieser Energiedifferenz ist, dann kann ihr Spin umklappen. Ermitteln Sie die Wellenlänge der Photonen, die solche Übergänge bewirken können. Dieses Phänomen nennt man Elektronenspinresonanz.

Lösung:

a) Die Wechselwirkungsenergie zwischen Elektron und magnetischem Feld ist $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, hier $E = -\mu_z \cdot B$. Darin ist $\mu_z = -gm\mu_B$ und $g = 2$ sowie $m = \pm 1/2$. Das Bohrsche Magneton ist $\mu_B = 5,79 \cdot 10^{-5}\text{eV/T}$. Damit errechnet sich die Energiedifferenz zu

$$\Delta E = \frac{1}{2} g\mu_B [B - (-B)] = g\mu_B B = 6,95 \cdot 10^{-5} eV \qquad (10)$$

b) Der Spin klappt um, wenn die Photonen die Wellenlänge $\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 1,79\text{cm}$ haben.

7. Stern-Gerlach-Experiment: Bei Silber im Grundzustand befindet sich das 5s-Elektron als einziges in einer nicht abgeschlossenen Schale. Ein Strahl von Silberatomen durchlaufe nun das Feld eines inhomogenen Stern-Gerlach Magneten in x-Richtung. Das Feld sei dabei durch:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_0\vec{e}_x + B_0\vec{e}_y + z \cdot 10^3 \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{m}}\vec{e}_z \tag{11}$$

gegeben. In Richtung des Atomstrahls habe es eine Ausdehnung von $l_1 = 4\text{cm}$, der Auffangschirm steht im Abstand $l_2 = 10\text{cm}$ vom Magneten entfernt.

a) Berechnen Sie die Komponente des magnetischen Moments in Richtung der Inhomogenität des Magnetfeldes, wenn die Aufspaltung des Strahls auf dem Schirm zu $d = 2\text{mm}$ und die Geschwindigkeit der Atome zu $v_x = 500\text{m/s}$ gemessen wurde. Die durchschnittliche Masse von Silberatomen beträgt $m = 1,79 \cdot 10^{-25}\text{kg}$.

b) Wie kann man mit diesem Experiment den g-Faktor des Elektrons bestimmen? Berechnen Sie ihn!

c) Warum stört der Kernspin der Silberkerne das Experiment nicht wesentlich?

Lösung:

a) Ein magnetischer Dipol erfährt in einem inhomogenen Magnetfeld eine Kraft. Diese berechnet sich, da die Inhomogenität unseres Feld in z-Richtung ist (d.h. $\delta_x B_x = \delta_y B_y = 0$ mittels:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu_z \frac{\delta B}{\delta z}\vec{e}_z \tag{12}$$

Solange sich der Dipol also im Magneten befindet, erfährt er eine Beschleunigung a und somit eine Auslenkung in z-Richtung. Die Geschwindigkeit in z-Richtung v_z, welcher der Dipol beim verlassen des Magneten hat, errechnet sich zu:

$$v_z = a \cdot t_1 = a \cdot \frac{l_1}{v_x} \tag{13}$$

Dabei ist $t_1 = l_1/v_x$ die Zeit ist, die ein Silberatom benötigt, um den Magneten zu v_x durchqueren. Gleichzeitig wird das Atom schon im Magneten ausgelenkt, die Größe der Auslenkung d_1 ist:

$$d_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{l_1}{v_x}\right)^2 \tag{14}$$

Da das Atom nach dem Durchqueren des Magneten eine konstante Geschwindigkeit in z-Richtung hat, vergrößert sich die Aufspaltung des Strahls im Bereich zwischen Magnet und Schirm nochmals um:

$$d_2 = v_z \cdot t_2 = \frac{a l_1 l_2}{v_x^2} \tag{15}$$

Auch hier ist wieder $t_2 = l_2/v_x$ die Zeit, die das Atom braucht um die letzte Teilstrecke zurückzulegen. Damit ergibt sich für die gesamte Aufspaltung:

$$d = 2 \cdot (d_1 + d_2) = 2 \cdot a \cdot \left(\frac{l_1^2}{2v_x^2} + \frac{l_1 l_2}{v_x^2} \right) = \frac{a l_1}{v_x^2} (l_1 + 2l_2) \tag{16}$$

Der Faktor 2 kommt daher, dass die Elektronen werden sowohl nach oben als auch nach unten ausgelenkt werden, somit die Aufspaltung zwei mal der Auslenkung entspricht.
Setzt man nun noch für die Beschleunigung den obigen Ausdruck aus der Kraft im inhomogenen Feld ein, so erhalten wir

$$\mu_z = \frac{m v_x^2 d}{\frac{\delta B}{\delta z} \cdot l_1 (l_1 + 2l_2)} = 9.32 \cdot 10^{-24} \mathrm{Am}^2 \tag{17}$$

b) Das Silber nur ein einziges Valenzelektron in der 5s-Schale hat, handelt es sich beim magnetischen Dipol des Elektrons um ein reines Spinmoment. Seine Komponente in z-Richtung ist also gegeben durch:

$$\mu_z = g_s \cdot m_s \cdot \mu_B \tag{18}$$

Da wir durch die Größe der Aufspaltung auf die Z-Komponente des magnetischen Moments schließen konnten, erhält man so eine Möglichkeit den g-Faktor genauer zu bestimmen. Beim Einsetzen der Werte mit $m_s = 1/2$ und $\mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24} \mathrm{Am}^2$ kommt man auf:

$$g_s = 2.01 \tag{19}$$

was deutlich vom theoretisch berechneten Wert von $g_s = 2.0022908$ abweicht. Dennoch kann man hier schnell zeigen, dass die Näherung $g_s \approx 2$ stimmt, aber eben nicht exakt ist.

c) Das magnetische Moment ist um 3 Größenordnungen kleiner, als das Spinmoment des Elektrons. Erwartet man also keine allzu genauen Ergebnisse, so kann man den Kernspin vernachlässigen.

8. a) Charakterisieren Sie den Zustand eines $3d_{5/2}$- und eines $3d_{3/2}$-Elektrons durch die Quantenzahlen n, l und j

   b) Atome mit einem $3d_{3/2}$-Leuchtelektron werden durch eine Stern-Gerlach Apparatur geschickt. Der für die Strahlaufspaltung verantwortliche Drehimpuls dieser Atome sei gleich dem Gesamtdrehimpuls des Leuchtelektrons. Wie viele Teilstrahlen ergeben sich nach dem Durchlaufen der Apparatur?

Lösung:

a) Für das $3d_{5/2}$ Elektron gilt: $n = 3$ $j = 5/2$ $l = 2$ $m_s = 1/2$
Für das $3d_{3/2}$ Elektron gilt: $n = 3$ $j = 3/2$ $l = 2$ $m_s = -1/2$

b) Die Kraft auf ein Elektron im inhomogenen Mageneten der Stern-Gerlach-Apparatur ist gegebn durch

$$\vec{F} = \mu_z \cdot \frac{\delta B}{\delta z}\vec{e}_z = m_j \hbar \frac{\delta B}{\delta z}\vec{e}_z \tag{20}$$

Da das entscheidende Elektron den Gesamtdrehimpuls $j = 3/2$ hat, existieren

$$-j \leq m_j \leq j \tag{21}$$

insgesamt $2j + 1 = 4$ verschiedene Möglichkeiten für die magnetische Quantenzahl und spaltet somit den Strahl in 4 Komponenten auf.

9. Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, dessen Elektron sich in einem 3d-Zustand befindet, gemäß der Schrödingertheorie.

   a) Geben Sie an, in welche Niveaus der 3d-Zustand bei Berücksichtigung der LS-Kopplung aufspaltet
   b) Die Energieverschiebung der Niveaus sei gegeben durch $\Delta E = a(\vec{l} \cdot \vec{s})$. Berechnen Sie die neuen Energieniveaus mit dieser Konstante a und skizzieren Sie die beiden neuen Zustände relativ zum ursprünglichen $3d$-Zustand!

Lösung:

a) Das $3d$ Niveau hat die Quantenzahlen $n = 3$ und $l = 2$. Der Bahndrehimpuls koppelt mit dem Spin zu den Niveaus $3d_{3/2}$ und $3d_{5_2}$

b) Um die Verschiebung der neuen Niveaus relativ zum ursprünglichen zu berechnen, müssen wir das Skalarprodukt von $\vec{l} \cdot \vec{s}$ umformen. Da für den Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ gilt, können wir schreiben:

$$\vec{j}^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2 = \vec{l}^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2 \tag{22}$$

Das kann ungeformt werden zu

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2 = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right] \tag{23}$$

was zu einer Aufspaltung der beiden Niveaus führt:

$$3d_{3_2} : \Delta E = -\frac{3}{2}a\hbar^2 \tag{24}$$

$$3d_{5_2} : \Delta E = a\hbar^2 \tag{25}$$

10. Wasserstoffähnlich nennt man Ionen, welche nur ein Elektron haben. Ihre Feinstruktur wird analog zum Wasserstoff beschrieben.

   a) Zeigen Sie, dass der Korrekturterm für die Feinstruktur und die relativistische Korrektur zu keinem möglichen Wert der Quantenzahlen n und j verschwindet, sondern stets zu einer Absenkung der Energie, also zu einer stärkeren Bindung führt.

   b) Das einfach ionisierte Helium ist ein wasserstoffähnliches Atom. In wie viele Energieniveaus spalten die Terme des einfach ionisierten Heliums, die zu den Hauptquantenzahlen $n = 3$ und $n = 4$ gehören, durch die Feinstruktur-Wechselwirkung auf? Berechnen Sie die Aufspaltung.

   c) Berechnen Sie die Energie der unverschobenen Niveaus und die Verschiebung relativ dazu! Für welches n und welches j entsteht die größte Verschiebung?

Lösung:

a) Die Energie eines Elektrons mit den Quantenzahlen n und j ist unter Berücksichtigung der relativistischen Korrektur und der Feinstruktur

$$E_{n,j} = E_n \left[1 - \underbrace{\frac{Z^2\alpha^2}{n} \left(\frac{j}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right)}_{\text{Korrekturterm } \Delta E_{korr}/E_n} \right] \tag{26}$$

Es ist nun zu zeigen, dass der Korrekturterm immer zu einer Absenkung führt, hier also immer $\Delta E_{korr} > 0$ ist.
Schaut man sich die einzelnen Komponenten an, so stellt man fest:

$$\frac{Z^2\alpha^2}{n} > 0 \tag{27}$$

für alle n. Ausserdem muss

$$\frac{j}{j+1/2} - \frac{3}{4n} > 0 \tag{28}$$

Wegen $j_{max} = l_{max} + 1/2 = n - 1 + 1/2$ gilt dann also

$$\frac{j}{n-1+1/2+1/2} - \frac{3}{4n} = \frac{4}{4n} - \frac{3}{4n} = \frac{1}{4n} > 0 \tag{29}$$

b) Auch in Wasserstoffähnlichen Systemen gilt immer $s = 1/2$. Damit spaltet es genauso wieder Wasserstoff auch in n Niveaus auf.

c) Für $n = 3$ ist $\Delta E_{1/2} = 2.4 \cdot 10^{-4}$eV, $\Delta E_{3/2} = 8.02 \cdot 10^{-4}$eV und $\Delta E_{5/2} = 2.67 \cdot 10^{-5}$eV.
Für $n = 4$ ist $\Delta E_{1/2} = 1.16 \cdot 10^{-4}$eV, $\Delta E_{3/2} = 4.46 \cdot 10^{-4}$eV, $\Delta E_{5/2} = 2.08 \cdot 10^{-5}$eV und $\Delta E_{7/2} = 8.93 \cdot 10^{-6}$eV

11. Die Hyperfeinstruktur beschreibt eine weitere Aufspaltung magnetischer Zustände, die analog zur Spin-Bahn-Kopplung durch die Kopplung des magnetischen Moments $\vec{\mu}_j$ mit dem des Kernspins $\vec{\mu}_I$ entsteht.

a) Schätzen Sie das Verhältnis $\frac{\Delta E_{HFS}}{\Delta E_{FS}}$ der Hyperfeinaufspaltung zur Spin-Bahn-Kopplung ab.

b) Der Grundzustand von Deuterium ist in zwei Hyperfeinniveaus mit $F = 1/2$ und $F = 3/2$ aufgespalten. Welchen Wert muss entsprechend die dem Deuterium zugeordnete Spinquantenzahl I haben?

c) In welche Hyperfeinzustände spaltet das $p_{3/2}$-Niveau des Deuteriums auf, wenn Sie vom vorher ermittelten I ausgehen?

Lösung:

a) Bildet man den quotienten der Verschiebungen, die aus Feinstruktur und Hyperfeinstruktur

$$\frac{\Delta_{FS}}{\Delta_{HFS}} = \frac{g_s \mu_B \left(\vec{S} \cdot \vec{B}_l\right)/\hbar}{g_i \mu_K \left(\vec{I} \cdot \vec{B}_j\right)/\hbar} \tag{30}$$

so kann zum Abschätzen davon ausgegangen werden, dass die Drehimpuls $\vec{l}$ und $\vec{j}$ sowie die Spins $\vec{s}$ und $\vec{I}$ von der Größenordnung $\hbar$ sind, was die resultierenden Magnetfelder vergleichbar macht. Die Lande-Faktoren g_s und g_I sind beide von der Größenorndung 1, also ergibt sich:

$$\frac{\Delta_{FS}}{\Delta_{HFS}} \approx \frac{\mu_B}{\mu_K} = 1836 \tag{31}$$

Daraus lässt sich schließen, dass die Hyperfeinstruktur zur Feinstruktur nur eine Nebenrolle spielt.

b) Die Konfiguration des Deuterons ist identisch zu der des Wasserstoffs. Das heißt, dass $n = 0$, $s = 1/2$ und damit $j = 1/2$. Es existieren nun zwei Zustände mit $F = 1/2$ und $F = 3/2$, was wegen $F = I + J$ bedeutet, dass der Kernspin $I = 1$ sein muss. Physikalisch betrachtet bedeutet dies, dass die Spins von Proton und Neutron parallel zueinander stehen.

c) Das $p_{3/2}$-Niveau hat den Gesamtdrehimpuls $j = 3/2$. Mit $I = 1$ und wegen $|I - J| \leq F \leq I + J$ kann $F = 1/2$, $F = 3/2$ oder $F = 5/2$ sein.