Ferienkurs Experimentalphysik 4
2012

Übung 1

1. Freie Wellenpakete

a) Betrachten Sie ein Elektron, das sich mit dem Impuls $p = \hbar k$ in x-Richtung bewegt. Wie lautet die zugehörige Wellenfunktion $\psi(t, x)$?

b) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit der Elektronenwelle aus a), indem Sie eine Stelle fester Phase im Laufe der Zeit durch den Raum verfolgen. Wie verhält sich die Phasengeschwindigkeit v_{Ph} der Welle zur Geschwindigkeit $v_{\mathrm{T}} = p/m$ des Elektrons?

c) Betrachten Sie nun ein Elektron, dessen Wellenfunktion durch eine kontinuierliche Überlagerung von ebenen Wellen der Form

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; A(k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega(k)t - kx)}$$

gegeben ist. Dabei sollen alle vorkommenden Wellenzahlen in dem Intervall $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ liegen und gleich stark beitragen, d.h. $A(k) = A_0 = \text{const.}$ Berechnen Sie die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$.

d) Bei der Berechnung der Wellenfunktion des Elektrons aus c) für einen allgemeinen Zeitpunkt macht der nichtlineare Term $\omega(k)$ im Exponenten Probleme. Um $\psi(t, x)$ näherungsweise zu bestimmen, entwicklen Sie $\omega(k)$ um k_0 bis zur linearen Ordnung. Berechnen Sie nun das genäherte Integral für $\psi(t, x)$.

2. Linienspektren

Sie beobachten zwei Linienspektren von Ein-Elektron-Systemen. Sie messen jeweils die drei größten und die kleinste Wellenlänge einer Serie.

Serie 1 [nm]	Serie 2 [nm]
468.135	484.282
320.012	250.964
273.072	173.271
204.854	23.332

a) Um welche Systeme handelt es sich (beobachtetes Element und Grundzustand der beobachteten Serie)?

b) Welche Übergänge wurden beobachtet?

3. Ortswellenfunktion, Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Die quantenmechanische Wellenfunktion eines Teilchens sei gegeben durch

$$\psi(x) = N x \mathrm{e}^{-a\frac{|x|}{2}}.$$

a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N so, dass die Wellenfunktion auf Eins normiert ist, d.h. dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; |\psi(x)|^2 = 1$$

gilt und begründen Sie die Notwendigkeit von normierten Wellenfunktionen für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation in der Quantenmechanik. Welche Einheit hat die Wellenfunktion?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen am Ort $x = 0$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Intervall $[-1/a, 1/a]$ zu finden?

Hinweis: $x^n \mathrm{e}^{-ax} = (-\mathrm{d}/\mathrm{d}a)^n \mathrm{e}^{-ax}$.

4. Potentialkasten

Ein kräftefreies Teilchen befinde sich in einem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

in einem seiner stationären Zustände

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

a) Zeigen Sie, dass diese Zustände normiert sind und bestimmen sie die Energieeigenwerte E_n. Welche Energie ist nötig um ein Elektron, das sich in einem Potentialkasten der Breite 1 nm befindet, vom Grundzustand in den zweiten angeregten Zustand anzuregen.
Hinweis: Masse des Elektrons $m_\mathrm{e} = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg $= 511$ keV$/c^2$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortes x und des Impulsoperators $\hat{p}$ für die stationären Zustände und interpretieren Sie die Ergebnisse.

c) Berechnen Sie die Energieunschärfe $\Delta\hat{H}$ für die stationären Zustände und interpretieren Sie das Ergebnis.

d) Nehmen Sie nun an, das Potential hätte eine endliche Höhe. Was bedeutet dies qualitativ für das Teilchen?

Hinweis: $\int \mathrm{d}x \ \cos^2(ax) = \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{x}{2} + \text{const.}$

5. Potentialbarriere

Ein Teilchen mit Masse m und kinetischer Energie $E < V_0$ trifft von links auf eine Potentialbarriere der Form

$$V(x) = V_0 \Theta(x) \Theta(a-x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$.

a) Wie lautet der Ansatz für die Wellenfunktion $\psi(x)$? Überlegen Sie sich dazu auch die physikalischen Randebedingungen, also aus welchen Anteilen die in den einzelnen Bereichen auftretenden Lösungen bestehen können. Skizzieren Sie das Potential und die Wellenfunktion.

b) Ermitteln Sie die Bestimmungsgleichungen für die in der Wellenfunktion auftretenden Koeffizienten aus der Bedingung, dass die Wellenfunktion stetig differenzierbar sein soll. Sie sollen diese Bestimmungsgleichungen nicht lösen!

c) Wie nennt man den hier auftretenden Effekt der sich aus der Wellenfunktion erkennen lässt? Erklären Sie diesen Effekt kurz.

Gehen Sie nun vom Fall $a \to \infty$ aus. Aus der Potentialbarriere wird somit eine Potentialschwelle

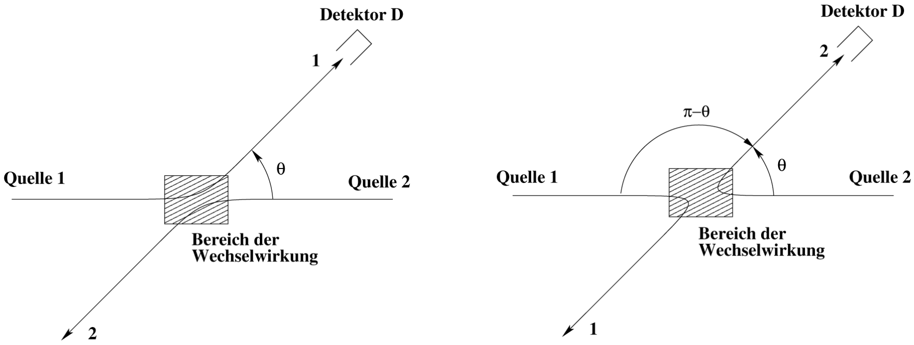
$$V(x) = V_0 \Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

d) Wie lautet nun der Lösungsansatz? Bestimmen Sie die dabei auftretenden Koeffizienten und bestimmen Sie die Reflexionswahrscheinlichkeit R für den Fall $E = V_0/2$.
Hinweis: Die Resultate aus c) könnten nützlich sein. Die Reflexionswahrscheinlichkeit R ist das Betragsquadrat der Amplitude der reflektierten Welle.

e) Wie lautet der Lösungsansatz für den Fall $E > V_0$? Was hat sich nun effektiv geändert? Bestimmen Sie die Reflexions- R und die Transmissionswahrscheinlichkeit T für den Fall $E = 9V_0/5$ und zeigen Sie dass $R + T = 1$ gilt.
Hinweis: Die Transmissionswahrscheinlichkeit ist das Betragsquadrat der Amplitude der transmittierten Welle multipliziert mit dem Quotient aus dem Wellenvektor der transmittierten Welle und dem Wellenvektor der reflektierten Welle.

6. Streuung und Interferenz

Wir betrachten die (quantenmechanische) Streuung von roten und grünen Teilchen aneinander. Die Streuamplitude für ein unter dem Winkel θ gestreutes Teilchen laute $f(\theta)$.



a) Wie groß ist die Gesamtstreuwahrscheinlichkeit (also die Wahrscheinlichkeit, dass ein rotes oder grünes Teilchen im Detektor D detektiert wird), wenn rote an grünen Teilchen streuen?

Nehmen Sie von nun ab an, dass die Teilchen entweder Fermionen oder Bosonen sein können.

b) Wie groß ist dann jeweils die Gesamtstreuwahrscheinlichkeit, wenn gleichfarbige aneinander gestreut werden? Beachten Sie die Teilchenaustauschsymmetrie!

c) Welche Streuwahrscheinlichkeit ergibt sich jeweils für Streuung unter $\theta = 90°$?