Ferienkurs Experimentalphysik 2 - Donnerstag-Übungsblatt

1 Aufgabe: Entropieänderung

a) Ein Kilogramm Wasser bei =°C wird in thermischen Kontakt mit einem Wärmereservoir bei 100°C gebracht, bis das Wasser die Temperatur 100°C erreicht hat. Wie groß ist die Entropieänderung

   I des Wärmebades,

   II des Wassers,

   III des Gesamtsystems aus Wasser und Wärmebad?

b) Wie groß wäre die Entropieänderung des Gesamtsystems, wenn man das Wasser von 0°C auf 100°C heizt, indem man es zuerst mit einem Wärmereservoir bei 50°C und dann (nachdem sich Gleichgewicht eingestellt hat) mit einem Wärmereservoir bei 100°C in Kontakt bringt?

c) Überlegen Sie sich, wie man das Wasser von 0°C auf 100°C heizen kann, ohne dass sich die Entropie des Gesamtsystems ändert.

1.1 Lösung

a) I Die Temperatur des Reservoir bleibt konstant nach dem thermischen Kontakt.

$$\rightarrow \Delta S_R = \frac{-m_{H_2O} c_V \Delta T_{H_2O}}{T_R} = -\frac{4,2kJ/K \cdot 100K}{373K} = -1,12kJ/K \tag{1}$$

Diese ist negativ, da das Reservoir Wärme abgibt.

II Die Temperatur von Wasser ändert sich beim Kontakt mit dem Reservoir

$$\rightarrow \Delta S_W = \int_{T_{H2O,c}}^{T_R} \frac{m_{H_2O} \cdot c_V \cdot dT_{H2O}}{T_{H2O}} = m_{H_2O} \cdot c_V \cdot ln\left(\frac{T_R}{T_{H2O,c}}\right) \tag{2}$$

$$\Delta S_W = 4,2kJ/K \cdot ln\left(\frac{373K}{273K}\right) = 1,3kJ/K \tag{3}$$

III Die Änderung der Gesamtentropie ist

$$\Delta S_{a)} = \Delta S_R + \Delta S_W = 180J/K \tag{4}$$

b) Jetzt mit zwei Schritten: $T_0 := T_c = 273K, \quad T_1 := 323K, \quad T_2 := T_R = 373K$

$$\Delta S_1 = -\frac{m_{H_2O} \cdot c_V \cdot (T_1 - T_0)}{T_1} + m_{H_2O} \cdot c_V ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = 56J/K \tag{5}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{m_{H_2O} \cdot c_V \cdot (T_R - T_1)}{T_1} + m_{H_2O} \cdot c_V ln\left(\frac{T_R}{T_1}\right) = 56J/K \tag{6}$$

$$\rightarrow \Delta S_{b)} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 97J/K < \Delta S_{a)} \tag{7}$$

2 Aufgabe - Phasenübergang

100g flüssiger Stickstoff bei seiner Siedetemperatur von 77,3K wird in einen isolierten Becher gekippt, wo sich 200g Wasser mit einer Temperatur von 5°C befindet. Wenn der Stickstoff, sobald gasförmig, die Lösung verlässt, wieviel Wasser ist gefroren? Die Verdampfungswärme von Stickstoff beträgt $200\frac{J}{g}$, die Schmelzwärme von Wasser beträgt $333\frac{J}{g}$, seine Wärmekapazität $4,2\frac{kJ}{kg \cdot K}$

2.1 Lösung

gegeben: m_{N_2}, $m_{H_2O,fl}$, Δ_{N_2}, Δ_{H_2O}, c_{H_2O}, $\Delta T_{H_2O,fl}$

$$\Delta Q_{N_2} = -\Delta Q_{H_2O} \tag{8}$$

$$m_{N_2} \cdot \Delta_{N_2} = m_{H_2O,fl} \cdot c \cdot \Delta T_{H_2O,fl} + m_{H_2O,ice} \cdot \Delta_{H_2O} \tag{9}$$

$$\rightarrow m_{H_2O,ice} = \frac{m_{N_2} \cdot \Delta_{N_2} - m_{H_2O,fl} \cdot c \cdot \Delta T_{H_2O,fl}}{\Delta_{H_2O}} = 47g \tag{10}$$

3 Aufgabe: Zimmerheizung

Eine Wärmepumpe wird benutzt, um im Winter ein Zimmer der Temperatur $T_h = 293K$ mit Hilfe von kalter Außenluft der Temperatur T_c zu heizen. Die maximale mechanische Leistung der Wärmepumpe sei $P = 100W$. Der Wärmeverlust des Zimmers (also die Rate, mit der Wärme durch die isolierung nach außen fließt) sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen innen und außen mit dem Koeffizienten $L = 7W/K$. Berechne die minimale Temperatur, die die Außenluft im Idealfall haben darf, damit die Zimmertemperatur aufrechterhalten kann.

3.1 Lösung

Die Wärmepumpe entnimmt dem kalten Reservoir (Außenluft) die Wärme ΔQ_L und führt unter Aufwand der Arbeit ΔW die Wärme $\Delta Q_h = \Delta Q_c + \Delta W$ dem heißen Reservoir (Zimmerluft) zu. Dabei ist der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Nutzen}{Aufwand} = \frac{|\Delta Q_h|}{\Delta W} \tag{11}$$

Ein idealer Prozess ist der umgekehrte Carnot-Kreisprozess, also kann man die zugeführte Wärmemenge damit berechnet werden.

$$\Delta Q_h = \frac{T_h}{T_h - T_c} \Delta W \tag{12}$$

$$\rightarrow \Delta \dot{Q}_h = \frac{T_h}{T_h - T_c} P \tag{13}$$

Andererseits ist die Wärmeverlustrate des Zimmers gemäß Angabe

$$\Delta\dot{Q}_{out} = L(T_Z - T_L) \tag{14}$$

Nun können wir im Gleichgewicht die eingebrachte und ausströmende Wärmemenge gleichsetzen.

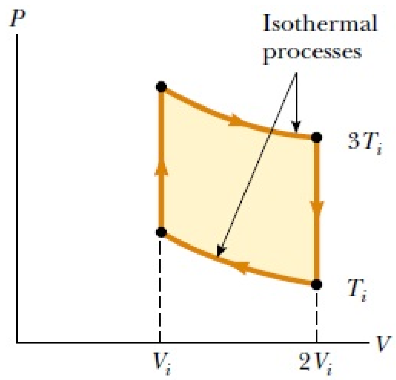
$$|\Delta Q_{out}| = |\Delta Q_h|, \quad \rightarrow L(T_h - T_c) = \frac{T_h}{T_h - T_c} P \tag{15}$$

Auflösen nach T_h:

$$T_c = T_h - \sqrt{T_h P / L} = 228,3K \tag{16}$$

4 Aufgabe: Kreisprozesse

ν Mol 1atomiges ideales Gas wird durch den dargestellten Kreisprozess geführt (2 Isotherme, 2 Isochore). Wie effizient ist dieser Prozess?



4.1 Lösung

Schauen wir uns die vier Teilprozesse an

I Isotherme Kompression bei T_i

$$\rightarrow \Delta Q_{I,c} = -\Delta W = \int_{2V_i}^{V_i} \nu R T_i \frac{dV}{V} = -\nu R T_i ln(2)$$

II Isochore Temperaturerhöhung von $T_i \rightarrow 3T_i$

$$\rightarrow \Delta Q_{II} = \nu c_V \Delta T = \nu c_V 2T_i = \nu 3RT_1$$

III Isotherme Expansion bei $3T_i$

$$\rightarrow \Delta Q_{III,h} = -\Delta W = \int_{V_i}^{2V_i} \nu R3T_i \frac{dV}{V} = \nu R3T_i ln(2)$$

IV Isochore Temperaturerniedrigung von $3T_i \rightarrow T_i$

$$\rightarrow \Delta Q_{IV} = \nu c_V \Delta T = -\nu c_V 2T_i = -\nu 3RT_1$$

$$\Delta W = \sum_{i_I}^{IV} \Delta Q_i = \Delta Q_{III,h} + \Delta Q_{I,c} = \nu R2T_i ln(2) \tag{17}$$

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_h + \Delta Q_{II}} = \frac{\nu R2T_i ln(2)}{\nu R3T_i ln(2) + \nu 3RT_1} = \frac{2ln2}{3(ln2-1)} \tag{18}$$

5 Aufgabe: Ottomotor

Der Kreisprozess im Ottomotor kann durch folgende idealisierten Prozess angenähert werden:

I Adiabatische Kompression des idealen 2-atomigen Arbeitsgases mit Temperatur T_1 und Druck p_1 vom Volumen $V_1 \rightarrow V_2$.

II Isochore Druckerhöhung, indem das mit einem Wärmebad der Temperatur T_3 in Berührung gebracht wird und der Temperaturausgleich abgewartet wird.

III Adiabatische Expansion bis zum Anfangsvolumen V_1

IV Isochore Druckerniedrigung bis zum Anfangsdruck p_1, wobei das Gas durch Kontakt mit einem zweiten Wärmebad der Temperatur T_1 abgekühlt wird.

a) Wie sieht das pV-Diagramm des Kreisprozesses aus? Berechne Drücke, Volumina und Temperaturen für die Anfangspunkte der 4 Teilprozesse. Zahlenwerte: $V_1 = 1,5dm^3$, Kompressionsverhältnis $\epsilon = \frac{V_1}{V_2} = 8$, $T_1 = 303K$, $p_1 = 1bar$, $T_3 = 1973K$.

b) Welche Leistung gibt ein Motor bei der Drehfrequenz $f = 4500min^{-1}$ ab? c_V soll bei der Rechnung als konstant angenommen werden.

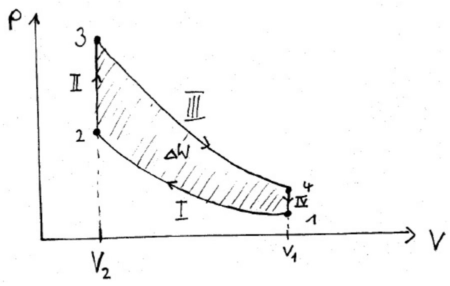
c) Wie groß ist der effektive Wirkungsgrad des Motors? Zeige, dass $\nu \sim \epsilon$. Vergleiche ihn mit dem Wirkungsgrad einer Carnot-Maschine.

5.1 Lösung

a) I Adiabate $\rightarrow T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$, $V_2 = \frac{V_1}{3} = \frac{1,5dm^3}{8} = 0,1875dm^3$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right) = T_1 \epsilon^{\kappa-1} = 303K \cdot 8^{0,4} = 696K \tag{19}$$

$$p_2 = p_1 \epsilon^{\kappa} = 1 \cdot 8^{1,4} bar = 18,4bar \tag{20}$$



II Isochor
$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \rightarrow p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = 18,3 \cdot \frac{1973K}{696K} bar = 52,1 bar \tag{21}$$

III Adiabate
$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right) = \frac{p_3}{\epsilon^\kappa} = 2,84 bar \tag{22}$$

IV Isochor
$$T_4 = T_1 \frac{p_4}{p_1} = 859K \tag{23}$$

	1	2	3	4
$V[dm^3]$	1,5	0,1875	0,1875	1,5
$p[bar]$	1,0	18,38	52,10	2,84
$T[K]$	303	696	1973	859

b)
$$\sum_{i=I}^{IV} \Delta Q_i = \sum_{i=I}^{IV} \Delta W_i$$

I,III: $\Delta Q_{I,III} = 0$ (Adiabaten) $\rightarrow$ Aufgenommene Wärmemenge: $\Delta Q_{II} = \nu c_V (T_3 - T_2) > 0$ Abgegebene Wärmemenge: $\Delta Q_{IV} = \nu c_V (T_1 - T_4) < 0$

$$\nu = \frac{p_1 V_1}{R T_1} \rightarrow \nu c_V = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{c_V}{R} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{c_V}{c_p - c_V} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{1}{\kappa - 1} = 1,238 \frac{Nm}{K} \tag{24}$$

$$\rightarrow \Delta Q_{II} = 1580J, \quad \Delta Q_{IV} = -688J \tag{25}$$

$$\rightarrow \Delta W = -(\Delta Q_{II} + \Delta Q_{IV}) = -892J \tag{26}$$

Damit folgt für die Leistung des Motors

$$p = \Delta W \cdot f = 892J \cdot \frac{4500}{60s} = 33,5kW \tag{27}$$

c) Thermodynamischer Wirkungsgrad $\eta_{Ottomotor}$

$$\eta_{Ottomotor} = \frac{|\Delta W|}{\Delta QII} = \frac{\Delta Q_{II} + \Delta Q_{IV}}{\Delta Q_{II}} = 1 + \frac{\Delta Q_{IV}}{\Delta Q_{II}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \tag{28}$$

$$T_1 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa - 1}, \quad T_4 = T_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa - 1} \tag{29}$$

$$\rightarrow \eta_{Ottomotor} = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\kappa - 1}} = 56,5\% \tag{30}$$

Wirkungsgrad einer Carnot-Maschine: $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 84,6\%$

6 Aufgabe: Kugel im Eis

Ein Gewehrkugel (Masser m, Temperatur $T_{b,h}$), wird mit einer Geschwindigkeit v in einen großen Eisblock geschossen, dessen Temperatur 0°C beträgt. Die Kugel bleibt im Eis stecken. Wie lässt sich berechnen, wieviel Wasser dadurch schmelzen wird? Welche Werte brauchen wir für diese Berechnung?

6.1 Lösung

$$\Delta Q_b = \Delta Q_{H_2O} \tag{31}$$

$$\Delta Q_b = E_{kin,b} + \Delta Q_b = \frac{1}{2}mv^2 + mc_{V,b} \underbrace{(T_{b,h} - 0°C)}_{\Delta T} \tag{32}$$

$$\Delta Q_{H_2O} = m_{H_2O,fl} \Delta_{H_2O,Schmelz} \tag{33}$$

$$\rightarrow m_{H_2O,fl} = \frac{1}{\Delta_{H_2O,Schmelz}} \cdot (\frac{1}{2}mv^2 + mc_{V,b}\Delta T) \tag{34}$$

Was wir noch brauchen

- spezifische Schmelzwärme von Wasser $\Delta_{H_2O,Schmelz}$
- spezifische Wärmekapazität von der Kugel $c_{V,b}$

7 Aufgabe: Luftpumpe

Eine zylindrische Luftpumpe mit der Länge $L = 45cm$ und dem Durchmesser $d = 4cm$ ist bei dem Druck $p_1 = 1013mbar$ (Umgebungsdruck) und der Temperatur $T_1 = 296K$ (Umgebungstemperatur) mit Helium (1-atomig, ideales Gas) gefüllt.

a) Der Kolben wird um $x = 10cm$ in die Luftpumpe hereingedrückt, so dass ein Druck p_2 entsteht. Dieser Vorgang ist so schnell, dass dabei kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann. Berechne die Temperatur T_2 am Ende des Vorgangs.

b) Der Kolben wird solange festgehalten, bis ein Temperautrausgleich mit der Umgebung stattgefunden hat. Berechne den Druck p_3, der sich am Ende dieses Schrittes einstellt.

c) Der Kolben wird wieder losgelassen, so dass sich der Druck wieder dem Umgebungsdruck anpasst. Auch dieser Prozessschritt ist wieder so schnell, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann. Berechne die Temperatur T_4 und das Volumen V_4 am Ende des Schrittes.

d) Der Kolben wird losgelassen und es wird gewartet, bis ein Temperaturausgleich mit der Umgebung stattgefunden hat. Berechnen Sie das Volumen am Ende V_5 dieses Prozessschrittes.

e) Stelle den Prozess im pV-Diagramm dar.

7.1 Lösung

a)

$$V_1 = \left(\frac{d}{2}\right)\pi \cdot L = 566cm^3, \quad V_2 = \left(\frac{d}{2}\right)\pi \cdot (L-x) = 440cm^3$$

adiabatische Kompression

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} = 350K \tag{35}$$

b) $T_3 = T_1 = 296K$ und $V_2 = V_3$

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_2}{T_3}, \quad \rightarrow p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = 1303mbar \tag{36}$$

c) adiabatische Expansion $p_4 = p_1$

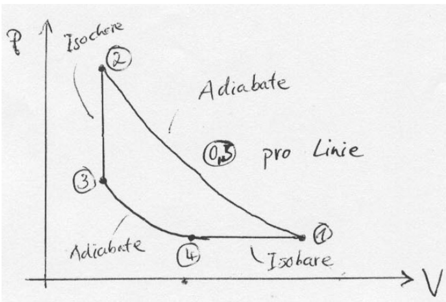
$$p_3 V_3^\kappa = p_4 V_4^\kappa, \rightarrow V_4 = V_3 \cdot \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{3/5} = 512cm^3 \tag{37}$$

$$\rightarrow T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{2/3} = 268K \tag{38}$$

d) Isobare Expansion, $p = const \rightarrow \frac{V}{T} = const.$, $T_5 = T_1 = 296K$

$$V_5 = V_4 \cdot \left(\frac{T_3}{T_4}\right) = 566cm^3 \tag{39}$$

e)


p
Isochore
Adiabate
0,5 pro Linie
2
3
1
4
Adiabate
Isobare
V