Ferienkurs Experimentalphysik 2 - Mittwoch-Übungsblatt

1 Aufgabe: Adiabatengleichung fürs Ideale Gas

Aus dem 1. HS und den Wärmekapazitäten c_p und c_V folgt zusammen mit dem Adiabatenkoeffizienten $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$ die Adiabatengesetze

$$pV^\kappa = const., \quad TV^{\kappa-1} = const., \quad T^\kappa p^{1-\kappa} = const$$

Wie kommt man dahin?

1.1 Lösung

Wenn ein Prozess adiabatisch ist, d.h. $\delta Q = 0$, lautet dann der 1. HS

$$dU = \nu c_V dT = -pdV \tag{1}$$

Mit $c_V = \frac{f}{2}R$ und der idealen Gasgleichung $p = \frac{\nu RT}{V}$ landen wir mit ein wenig Umarrangieren bei

$$\frac{f}{2}\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} \qquad \Big| \int \tag{2}$$

$$ln\left(T^{\frac{f}{2}}\right) = ln\left(V^{-1}\right) + const. \qquad \Big| \ e^{()} \tag{3}$$

$$T^{\frac{f}{2}}V = TV^{\frac{2}{f}} = TV^{\kappa-1} = const. \tag{4}$$

2 Aufgabe: Gasprozess

Ein Liter eines 2-atomigen idealen Gases habe die Temperatur 273K und dein Druck von 1 bar.

a) Es wird adiabatisch auf die Hälfte seines ursprünglichen Volumen komprimiert. Bestimme Druck und Temperatur nach der Kompression.

b) Das Gas wird nun wieder unter konstantem Druck auf 273 abgekühlt. Wie groß ist anschließend sein Volumen?

2.1 Lösung

$c_V = \frac{5}{2}R, \quad c_p = \frac{7}{2}R \rightarrow \kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{7}{5}$

a)

$$p_i V_i^\kappa = p_f \left(\frac{V_i}{2}\right)^\kappa \rightarrow p_f = p_i \cdot 2^\kappa = 2,67bar \tag{5}$$

$$T_i V_i^{\kappa-1} = T_f \left(\frac{V_i}{2}\right)^{\kappa-1} \rightarrow T_f = T_i \cdot 2^{\kappa-1} = 360K \tag{6}$$

b) $p = const.$

$$\rightarrow \frac{T_f}{V_f} = \frac{T_i}{V_{relax}} \tag{7}$$

$$V_{relax} = \frac{T_f}{T_i}\frac{V_i}{2} = 0,38l \tag{8}$$

3 Aufgabe: Wärmekapazität

Ein Behälter mit 1 mol Helium (He) und ein gleich großer Behälter mit 1 mol Stickstoff (N_2) werden jeweils mit der gleichen Heizleistung $P = 10W$ erwärmt. Die Wärmekapazität der Behälterwand beträgt jeweils $C_W = 10\frac{J}{K}$. Berechne, wie lange es dauert, bis die Behälter von $T_1 = 20°C$ auf $T_2 = 100°C$ erwärmt sind. Wie lange dauert die Erwärmung von N_2 auf 1000°C, wenn angenommen wird, dass ab 500°C die Schwingungsfreiheitsgrade abrupt angeregt werden können?

3.1 Lösung

Nach dem Gleichverteilungssatz trägt jeder Freiheisgrad (eigentlich jede Energiekomponente) $\frac{1}{2}R$ zur Wärmekapazität eines Gases pro Mol bei.

- Für ein 1-atomiges Gas gilt $c_{V,He} = \frac{3}{2}R$.
- Für ein 2-atomiges Gas, bei dem die Translations- und Rotationsfreiheitsgrade angeregt sind gilt $c_{V,N_2} = \frac{5}{2}R$
- Für ein 2-atomiges Gas, bei dem zusätzlich noch die Schwingungsfreiheitsgrade angeregt sind gilt $c_{V,N_2,h} = \frac{7}{2}R$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 80K, \quad \Delta Q = c_V \Delta T$$

Benötigte Zeit zum Erwärmen

$$t = \frac{\Delta U + \Delta U_{Wand}}{P} = \frac{(c_V + c_W)\Delta T}{P} \tag{9}$$

- $$He: \quad c_{V,He} = \frac{3}{2}R \rightarrow t = \frac{(c_{V,He} + c_W)\Delta T}{P} = 179,8s \tag{10}$$

  item

  $$He: \quad c_{V,N_2} = \frac{5}{2}R \rightarrow t = \frac{(c_{V,N_2} + c_W)\Delta T}{P} = 246,3s \tag{11}$$

Erwärmung von N_2 von 100°C auf 1000°C:

$$100°C \to 500°C: \quad t_1 = \frac{c_{V,N_2} + c_W)(500°C - 100°C)}{P} = 1231,4s \tag{12}$$

$$500°C \to 1000°C: \quad t_1 = \frac{c_{V,N_2,h} + c_W)(1000°C - 500°C)}{P} = 1955,0s \tag{13}$$

$$t_{ges} = t_1 + t_2 = 3186,4s = 53min\,6,4s \tag{14}$$

4 Aufgabe: Autoreifen

Ein Autofahrer pumpt die Reifen seines Autos auf einen Druck von 180 kPa auf, während die Temperatur bei $T_i = -8°C$ liegt. Als er sein Fahrziel erreicht hat, ist der Reifendruck auf 245kPa angestiegen. Wie hoch ist dann die Temperatur der Reifen, wenn

a) angenommen wird, dass sie sich nicht ausdehnen?

b) angenommen wird, dass sie sich um 7% ausdehnen?

4.1 Lösung

a) Wenn das Volumen eines idealen Gases konstant gehalten wird, so ist $\frac{T}{p} = const.$. Folglich gilt für die Größen vor und nach der Autofahrt

$$\frac{T_i}{p_i} = \frac{T_f}{p_f} \tag{15}$$

$$\to T_f = \frac{p_f}{p_i} T_i \approx 360,9K \tag{16}$$

b)

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f \cdot 1,07 \cdot V_i}{T_{f,b}} \tag{17}$$

$$T_{f,b} = 1,07 \cdot \frac{p_f}{p_i} T_i = 1,07 \cdot T_f = 386,2K \tag{18}$$

5 Aufgabe: Gasgemisch

Zwei gegenüber der Außenwelt isolierte Gefäße sind durch ein kurzes Rohr mit zunächst geschlossenem Ventil und vernachlässigbarem Volumen miteinander verbunden. Im ersten Behälter befinden sich $V_{He} = 2m^3$ Helium bei $p_{He} = 1,2bar$ und $T_{He} = 30°C$. Im zweiten Behälter sind $m_{Ne} = 0,8kg$ Neon bei $p_{Ne} = 2.1bar$ und $T_{Ne} = 72°C$. Die molare Masse von Neon ist $M_{Ne} = 20,2\frac{g}{mol}$ und diejenige von Helium ist $M_{He} = 4\frac{g}{mol}$. Nun öffnet der Experimentator das Ventil, wodurch sich die Gase vermischen und ein thermisches und mechanisches Gleichgewicht einstellt.

a) Welche Temperatur misst der Experimentator im Endzustand?

b) Welchen Druck misst er? Hinweis: Eine wichtige Erfahrungstatsache über Gemische idealer Gase ist, dass der resultierende Druck die Summe der von jedem Gas allein herrührenden Drücke (sog. Partialdrücke) ist.

c) Mit welchem *absoluten* isobaren Wärmekapazität $c_{p,ges}$ des Gemisches muss der Experimentator rechnen ($c_{p,He} = c_{p,Ne} = \frac{5}{2}R$)?

5.1 Lösung

Stoffmengen müssen noch in Mol umgerechnet werden.

$$\nu_{Ne} = \frac{800g}{20,2\frac{g}{mol}} \approx 39,6mol, \quad \nu_{He} = \frac{p_{He}V_{He}}{RT_{He}} \approx 95,3mol \tag{19}$$

a) Für das Gesamtsystem gilt

$$\Delta U = \Delta Q = \Delta W = 0 \tag{20}$$

$$\Delta Q_{Ne} + \Delta Q_{He} = 0 \tag{21}$$

$$\rightarrow \nu_{He}c_V(T - T_{He}) = \nu_{Ne}c_V(T_{Ne} - T) \tag{22}$$

$$\rightarrow T = \frac{\nu_{Ne}T_{Ne} + \nu_{He}T_{He}}{\nu_{He} + \nu_{Ne}} = 315,4K \tag{23}$$

b)

$$V_{ges} = V_{He} + V_{Ne} = 2m^3 + \frac{\nu_{Ne}RT_{Ne}}{p_{Ne}} = 2,54m^3 \tag{24}$$

$$p_{Ne}V_{ges} = \nu_{Ne}RT, \quad p_{He}V_{ges} = \nu_{He}RT \tag{25}$$

$$\rightarrow p = \frac{(\nu_{Ne} + \nu_{He})RT}{V_{ges}} = 1,4bar \tag{26}$$

c) Die gesamte innere Energie ist die Summe der einzelnen inneren Energien der beiden Gassorten.

$$\begin{aligned} C_{p,ges} &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \nu_{He} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial T}(\frac{3}{2}\nu_{Ne}RT + \frac{3}{2}\nu_{He}RT)\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{(\nu_{He} + \nu_{Ne})RT}{p}\right)\right)_p \\ &= \frac{3}{2}\nu_{He}R + \frac{3}{2}\nu_{Ne}R + \nu_{He}R + \nu_{Ne}R \\ &= \nu_{He}c_{p,He} + \nu_{Ne}c_{p,Ne} = 2,8kJ/K \end{aligned} \tag{27}$$

6 Aufgabe: Gasvolumen

Ein Behälter sei mit 2 Mol idealen, 1-atomigen Gas gefüllt (Volumen V_i) und an ein Wärmereservoir mit Temperatur $T_R = 293K$ angeschlossen. Der Behälter sei oben mit einem beweglichen, masselosen Stempel der Fläche $A = 0,25m^2$ abgeschlossen. Außerhalb des Behälters herrsche Luftdruck $p_i = 1 \cdot 10^5 N/m^2$. Auf den Stempel wird langsam Sand bis zu einer Gesamtmasse $m = 500kg$ gehäuft. Hierbei bedeutet *langsam*, dass die Temperatur des Gases konstant bleibt, da es mit dem Wärmereservoir in Verbindung steht.

a) Wie groß sind Volumen V_f und Druck p_f des Gases, wenn der gesamte Sand auf dem Stempel liegt?

b) Wie groß ist die Wärmemenge, die dabei zwischen Wärmereservoir und dem Gas ausgetauscht wurde?

c) Durch die Erwärmung des Gases soll der beladene Stempel nun auf die ursprüngliche Höhe gebracht werden. Welche Temperatur hat das Gas, wenn es das ursprüngliche Volumen einnimmt? Welche Wärmemenge wurde dem Gas hierfür zugefügt?

6.1 Lösung

a) Isothermer Prozess:

$$p_i V_i = p_f V_f, \quad p_f = p_i + \frac{mg}{A} = 1196hPa \tag{28}$$

$$\rightarrow V_f = \frac{\nu R T_R}{p_i + \frac{mg}{A}} = 40,73l \tag{29}$$

b) Gesucht ist die Wärmemenge, die zur Volumenkompression verwendet wurde.

$$\Delta W_{isotherm} = -\int_{V_i}^{V_f} p dV = -\nu R T_R \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \nu R T_R ln\left(\frac{V_i}{V_f}\right) \tag{30}$$

$$\Delta Q + \Delta W = 0$$
$$\rightarrow \Delta Q = \nu R T_R ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \nu R T_R ln\left(\frac{p_i}{p_f}\right) = -\nu R T_R ln\left(1 + \frac{mg}{Ap_i}\right) = -872,9J \tag{31}$$

c) Isobarer Prozess:

$$\frac{T_{f,c}}{T_R} = \frac{V_i}{V_f} \rightarrow T_{f,c} = \frac{V_i}{V_f} T_R = \frac{\nu R T_R^2}{p_i V_f} = 350,5K \tag{32}$$

$$\Delta U_{c)} = \Delta Q_{c)} - p_f(V_i - V_f) \tag{33}$$

$$\rightarrow \Delta Q_{c)} = \frac{3}{2}\nu R \Delta T + p_f(V_i - V_f) = \frac{5}{2}\nu R(T_{f,c} - T_R) = 2390J \tag{34}$$