Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs - Experimentalphysik 2 - Übungsblatt - Lösungen

Dienstag

Daniel Jost

Datum 21/08/2012

Aufgaben zur Magnetostatik

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie das Magnetfeld eines unendlichen langen Leiters mit Radius R und konstanter Stromdichte j für $r > R$.

Lösung:

Für den Strom gilt

$$I = \int_A \vec{j} \mathrm{d}\vec{A} = \pi R^2 j$$

Das Magnetfeld hat mit der Rechte-Hand-Regel den Ansatz $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$. Der Satz von Stokes liefert die Integration über den Rand eines Kreises mit Radius R:

$$\oint B(r) \mathrm{d}s = 2\pi r B(r)$$

damit also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

Aufgabe 2:

Greifen Sie die Aufgabe von gestern auf, in der Sie die Stromdichte in zwei konzentrischen Leitern bestimmen sollten (siehe Abb. 1). Berechnen Sie nun das Magnetfeld für $0 < r < \infty$, also im gesamten Raum.

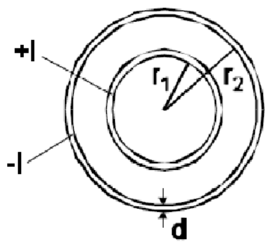

Abbildung 1: Stromdichte

Lösung: Für das innere Rohr gilt $j = \frac{I}{\pi[(r_1+d)^2 - r_1^2]}$ und für das äußere $j = \frac{I}{\pi[(r_2+d)^2 - r_2^2]}$. Um das $\vec{B}$-Feld in den Teilbereichen zu bestimmen, muss die Stromdichte noch über die entsprechenden Grenzen integriert werden.

$$j = \begin{cases} 0\ ,\ 0 < r < r_1 \\ \frac{I}{\pi[(r_1+d)^2 - r_1^2]} \cdot [\pi(r^2 - r_1^2)]\ ,\ r_1 < r < r_1 + d \\ I, r_1 + d < r < r_2 \\ \frac{I}{\pi[(r_2+d)^2 - r_2^2]} \cdot [\pi(r^2 - r_2^2)] - I\ ,\ r_2 < r < r_2 + d \\ 0\ ,\ r_2 < r < \infty \end{cases}$$

Das $\vec{B}$-Feld ergibt sich aus dem Satz von Stokes mit

$$\oint_A B(r)\mathrm{d}s = 2\pi r B(r)$$

also gerade den Rand des Kreises mit Radius r. Insgesamt also:

$$B(r) = \begin{cases} 0\ ,\ 0 < r < r_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r[(r_1+d)^2 - r_1^2]} \cdot (r^2 - r_1^2)\ ,\ r_1 < r < r_1 + d \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ ,\ r_1 + d < r < r_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r[(r_2+d)^2 - r_2^2]} \cdot ((r_2 + d)^2 - r^2)\ ,\ r_2 < r < r_2 + d \\ 0\ ,\ r_2 < r < \infty \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die in Abbildung 2 dargestellte Leiterschleife und berechnen Sie das

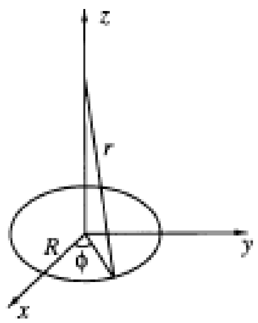

Abbildung 2: Leiterschleife

Magnetfeld auf der z-Achse mittels Biot-Savart.

Lösung: Biot-Savart ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Das Magnetfeld soll auf der z-Achse bestimmt werden. Also insbesondere bei

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

wohingegen $\vec{r}'$ der Ort der Leiterschleife ist. In Zylinderkoordinaten also

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für Biot-Savart braucht man noch $|\vec{r} - \vec{r}'|^3$:

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

und damit $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$. $\mathrm{d}\vec{r}'$ ist ein infinitesimales Wegstück der Leiterschleife. In diesem Fall also gerade

$$\mathrm{d}\vec{r}' = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi$$

Für $\mathrm{d}\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$ erhält man dann

$$\mathrm{d}\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi \\ Rz\sin\varphi \\ R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\varphi$$

Eingesetzt in Biot-Savart liefert das

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi \\ Rz\sin\varphi \\ R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

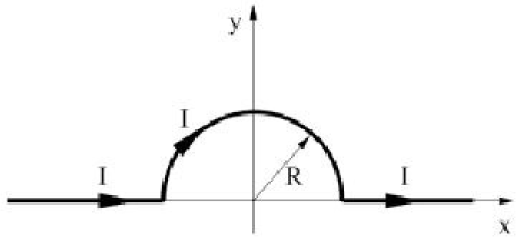

Abbildung 3: Halbe Leiterschleife

Aufgabe 4:

Gegeben sei ein in der x-y-Achse liegender, dünner Leiter mit einer halbkreisförmigen Ausbuchtung mit Radius R durch den ein Strom I fließt (Abb. 3). Bestimmen Sie das Magnetfeld im Ursprung.

Lösung: Wieder mit Biot-Savart. Dieses Mal ist $\vec{r} = \vec{0}$, also

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\vec{r}' \times (-\vec{r})}{|\vec{r}'|^3}$$

Für den geraden Teil des Leiters gilt $\mathrm{d}\vec{r}' || \vec{r}'$, das heißt, es trägt nicht zum Integral bei. Beim halbkreisförmigen Stück gilt $\mathrm{d}\vec{r}' \perp \vec{r}'$. Damit kann man das Kreuzprodukt durch ein normales Produkt ersetzen und das Integral vereinfacht sich zu:

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}r' \times (-r)}{|\vec{r}'|^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \; r' \cdot \frac{1}{r'^2} = -\frac{\mu_0 I}{4r'}$$

Das Endergebnis mit Richtungsvektor ist also:

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu_0 I}{4R} \vec{e}_z$$

Aufgaben zu Stromkreisen und zeitlich veränderlichen Feldern

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die Messanordnung in Abbildung 4, bestehend aus einem geraden Leiterdraht und einer flachen quadratischen Spule mit $N = 1000$ Windungen. Im Draht fließt der Wechselstrom $I = I_0 \cos \omega t$. Berechnen Sie die Spannung $U(t)$ für $a = 5cm$, $I_0 = 10\text{A}$ und $f = 60\text{Hz}$. Der Draht sei unendlich lang und besitze einen verschwindende Querschnitt.

Lösung:

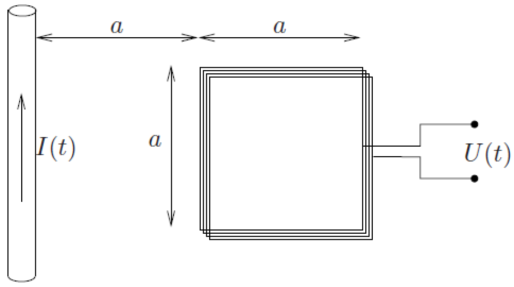

Abbildung 4: Quadratische Leiterschleife

Die Induktionsspannung ist

$$U_{ind} = -N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{A}$$

Für das $\vec{B}$-Feld, das durch den Draht erzeugt wird, gilt insbesondere:

$$\vec{B} = B\vec{e}_{\varphi} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}\vec{e}_{\varphi}$$

Jetzt müssen wir uns Gedanken über die Integration des $\vec{B}$-Feldes machen. Man wählt zunächst die x-z-Ebene als diejenige, in der sich die Anordnung befinde. Dann liegt der Draht entlang der z-Achse und die Schleife im positiven x-Bereich. Für das magnetische Feld gilt bei dieser Anordnung ferner $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es interessiert das Feld bei $y = 0$. Die Spannung ist dann als das Integral über die Schleife gegeben, also gerade

$$U(t) = N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{2a}\mathrm{d}x\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}z\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} = -\frac{Na\mu_0 \ln 2}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{Na\mu_0 \ln 2}{2\pi}I_0\omega\sin\omega t$$

Aufgabe 6:

Betrachten Sie die Schaltung aus Abbildung 5. Zunächst sei der Schalter geöffnet und der Kondensator ungeladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter geschlossen und die Schaltung mit der **konstanten** Spannung U verbunden.

(a) Wie groß ist der Gesamtstrom im Stromkreis unmittelbar nach dem Schließen des Schalters? Wie groß ist die Ladung des Kondensators und der Gesamtstrom für sehr große Zeiten?

(b) Berechnen Sie für $t > 0$ den Gesamtstrom im Stromkreis und die Ladung des Kondensators als Funktion der Zeit, indem Sie die geeignete Differentialgleichung aufstellen und lösen.

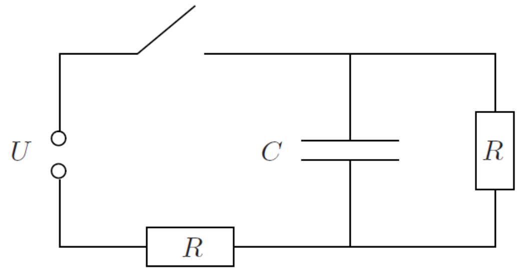

Abbildung 5: Spannungsnetzwerk

Lösung:

(a) Unmittelbar nach Schließen des Schalters befindet sich keine Ladung auf dem Kondensator, der effektive Widerstand ist Null, daher wirkt der Kondensator wie eine leitende Verbindung. Der gesamte Anfangsstrom läuft durch den Kondensatorast und kein Strom durch den parallel geschalteten Widerstand. Der einzige Widerstand im Stromkreis ist also der an der Spannungsquelle und der Gesamtstrom ist:

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

Für große Zeiten t hat der Kondensator eine konstante Ladung und der gesamte Strom fließt durch den Widerstandsast. Daher gilt:

$$2RI_\infty = U$$

also

$$I_\infty = \frac{U}{2R}$$

Die Ladung auf dem Kondensator ist dann mit

$$\frac{Q_\infty}{C} + RI_\infty = U$$

gerade

$$Q_\infty = \frac{CU}{2}$$

(b) Es ist $I_C = \dot{Q}$ der Strom durch den Kondensator, I_R der Strom durch den parallel geschalteten Widerstand und I der Gesamtstrom. Dann gilt mit der Maschenregel

$$RI_R = U - RI$$

und

$$\frac{Q}{C} = U - RI$$

sowie nach der Knotenregel:

$$I_R + I_C = I$$

Eliminiert man den Gesamtstrom I, erhält man

$$RI_R = \frac{1}{2}(U - RI_C)$$

und

$$\frac{Q}{C} = U - R(I_R + I_C)$$

und durch Eliminierung von I_R schließlich

$$\frac{Q}{C} + \frac{1}{2}RI_C = \frac{1}{2}U$$

Da $I_C = \dot{Q}$ gilt, ergibt sich daraus eine Differentialgleichung

$$\dot{Q} + \frac{2}{RC}Q = \frac{U}{R}$$

mit der Lösung

$$Q(t) = A\exp[-\frac{2t}{RC}] + \frac{CU}{2}$$

. Mit der Anfangsbedingung $Q(t = 0) = 0$ ergibt sich

$$Q(t) = \frac{CU}{2}(1 - \exp[-\frac{2t}{RC}]$$

Der Gesamtstrom ist dann mit

$$I(t) = \frac{U}{2R}(1 + \exp[-\frac{2t}{RC}])$$

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Reihenschaltung aus einem elektrischen Widerstand R, einer Spule mit Induktivität L, eines Kondensators der Kapazität C und einer zeitabhängigen Spannungsquelle mit $U(t) = U_0 \exp[i\omega t]$. Wie lautet die Differentialgleichung für die Ladung Q des Kondensators? Lösen Sie die Differentialgleichung in Q mit dem Ansatz $Q(t) = A\exp[i\omega t]$.

Lösung
Die Differentialgleichung ergibt sich aus der Maschenregel:

$$U - L\dot{I} - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

Mit dem gegeben Ansatz und komplexen Widerständen wird die Gleichung zu

$$U_0 \exp[i\omega t] = (-\omega^2 LA + i\omega RA + \frac{A}{C}) \exp[i\omega t] = U_0 \exp[i\omega t]$$

Die komplexe Amplitude ist dann also

$$A = \frac{U_0}{-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}}$$

Aufgabe zur Lorentzkraft

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein langer dünner Draht mit Längenladungsdichte λ. Im Draht fließe außerdem ein Strom der Stärke I.

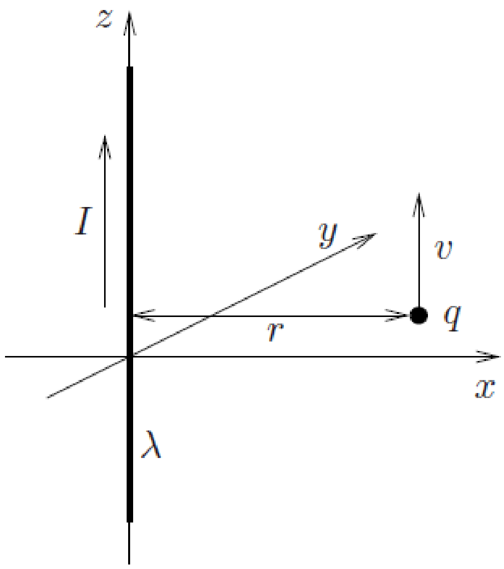

Abbildung 6: Aufgabe

(a) Zeigen Sie, dass elektrisches und magnetisches Feld des Drahtes gegeben sind durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_r \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

(b) Mit welcher Geschwindigkeit v muss ein Teilchen der Masse m und Ladung q parallel entlang des Drahtes fliegen, damit der Abstand r zwischen Ladung und Draht konstant ist?

Lösung:

(a) Betrachte hierzu vorherige Aufgaben.

(b) Für die Kraft gilt

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_x + v\vec{e}_z \times \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_y \right)$$

Die Bedingung an die Kraft ist mit $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$ dann gerade

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - v\frac{\mu_0 I}{2\pi r} ==$$

also

$$v = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\lambda}{I}$$