Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs - Experimentalphysik 2 - Übungsblatt - Lösungen

Montag

Daniel Jost

Datum 20/08/2012

1 Aufgaben zur Elektrostatik

Aufgabe 1:

(a) Betrachten Sie eine Ladung q, die im Ursprung sitzt. Bestimmen Sie mithilfe des Satzes von Gauß das elektrische Feld $\vec{E}$. Warum ist es sinnvoll den Ansatz $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$ zu wählen?

(b) Eine homogen geladene Kugel mit Radius R und der Gesamtladung q sitze im Ursprung. Bestimmen Sie das elektrische Feld zunächst für $r > R$. Was stellen Sie im Hinblick auf die vorherige Aufgabe fest? Berechnen Sie nun das elektrische Feld für $r < R$.

(c) Zwei konzentrische Kugeln mit Ladung $+q$ und $-q$ und den Radien R_1 und R_2, $R_1 < R_2$ bilden einen Kugelkondensator. Berechnen Sie dessen Kapazität [Sie können die Lösung der Teilaufgabe (a) recyceln].

Lösung:

(a) Ausgehend von der Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

mit dem Ansatz

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$$

erhält man mittels Satz von Gauß

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}^3 r = \int_{\partial K} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

einen Ausdruck für $E(r)$. Mit dem Ansatz kann man insbesondere ausnutzen, dass $\mathrm{d}\vec{A} || \vec{e}_r$, also $\mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{e}_r = 1$ gilt.

$$\int_{\partial K} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\partial K} E \mathrm{d}A \cdot \vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\partial K} E \mathrm{d}A$$

∂K entspricht der Kugeloberfläche. Das bedeutet, man integriert über die Kugeloberfläche (sinnigerweise sollte natürlich $4\pi r^2$ rauskommen):

$$\int_{\partial K} E \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \; r^2 \cdot \sin\theta E(r)$$

Insgesamt also

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ r^2 \cdot \sin\theta E(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

bzw.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

Hinweis: Wir haben die rechte Seite jetzt einfach so hingeschrieben. Formal richtig ist es, die Ladungsdichte mit $\rho(r) = q\delta^3(r)$ anzugeben. Dann gilt für die rechte Integration $\int_K \mathrm{d}^3 r \delta^3 r q = q$, also das gewünschte Ergebnis.

(b) Wieder Satz von Gauß. Für die linke Seite gilt jetzt, dass wir über eine gauß'sche Kugel integrieren, deren Radius $r > R$ ist. Am Ergebnis aus (a) ändert sich also nichts für die linke Seite. Für die Ladungsverteilung allerdings gilt formal

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{q}{4/3\pi R^3}\ ,\ r \leq R \\ 0\ ,\ sonst \end{cases}$$

Die Integration erfolgt immer noch über die Gauß'sche Kugel. Während aber auf der linken Seite über deren Oberfläche integriert wird, bedarf es auf der rechten Seite der Berechnung des Volumens.

$$\int_K \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}\mathrm{d}V = \int_0^r \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ r^2 \sin\theta \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Allerdings muss der Sprung bei R berücksichtigt werden:

$$\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ r^2 \sin\theta \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} + \int_R^r \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ r^2 \sin\theta \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Die zweite Integration verschwindet natürlich, weil die Ladungsverteilung gleich Null ist. Für die innere Kugel erhält man wie gewohnt das Ergebnis $\frac{q}{\epsilon_0}$ womit das Endergebnis exakt das Ergebnis aus (a) ist.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

Betrachtet man nun das elektrische Feld für $r < R$, so ändert sich die Integrationsgrenze für den Radius auf der rechten Seite.

$$\int_0^r \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ r^2 \sin\theta \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{q}{4/3\pi R^3 \epsilon_0}$$

Wie gewohnt der Ansatz des elektrischen Feldes, der uns dann

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi R^3 \epsilon_0} \, r \, \vec{e}_r$$

liefert.

(c) Die Kapazität eines Kondensators kann man natürlich mit

$$C = \frac{q}{U} \tag{1}$$

berechnen. Dazu benötigt man nur noch die Größe U, also die Potentialdifferenz zwischen den beiden Kugeln, also

$$U := \phi(R_1) - \phi(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r}$$

Das $\vec{E}$-Feld ist bereits aus den vorherigen Aufgaben bekannt. Es gilt außerdem $\mathrm{d}\vec{s} || \vec{e}_r$, womit

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E \, \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [-\frac{1}{r}]_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 \, R_2}$$

Die Kapazität ist also

$$C = \frac{q}{q/4\pi\epsilon_0} \frac{R_1 \, R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 \, R_2}{R_2 - R_1} \tag{2}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie einen Plattenkondensator mit Fläche $A = L \cdot a$, dessen Platten den Abstand d besitzen und die Ladung Q tragen.

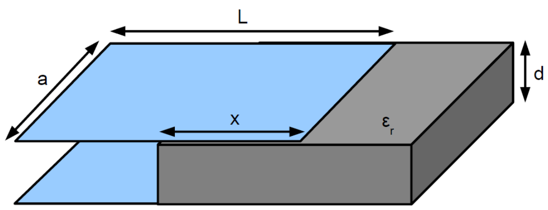

Abbildung 1: Dielektrikum in Kondensator

(a) Berechnen Sie die Kapazität dieses Kondensators via Satz von Gauß zunächst ohne Dielektrikum. Argumentieren Sie über den Satz von Gauß, warum nur die Plattenflächen bei der Gaußschen Box berücksichtigt werden müssen. **Hinweis:**Betrachten Sie die $\vec{E}$-Felder der Kondensatorplatten zunächst getrennt und berücksichtigen Sie dann die Superposition.

(b) Nun wird, wie in Abbildung 1 gezeigt, ein Dielektrikum mit relativer Dielektrizitätskonstante ϵ_r in den Kondensator geschoben. Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators in Abhängigkeit von x. Sie können alle bekannten Formeln recyceln.

Lösung:

(a) Zur Berechnung benötigt man die Spannung, also überlegt man sich zunächst, in welche Richtung das elektrische Feld zeigt. Wir legen die z-Achse senkrecht zur Kondensatorplatten. Damit ist $\vec{E} = E\vec{e}_z$. Mit dem Satz von Gauß erhält man das $\vec{E}$-Feld, das von der positiv geladenen Kondensatorplatte erzeugt wird.

$$\int_{\partial V = A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Es gilt $\mathrm{d}\vec{A} || \vec{e}_z \Rightarrow \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{e}_z = \mathrm{d}A$. Also:

$$2 \cdot aL \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0} \;\Rightarrow\; E = \frac{1}{2 \cdot aL} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Für die zweite Kondensatorplatte kann man eine ähnliche Überlegung anstellen, findet aber letztlich, dass der Betrag E' des zweiten Feldes gerade E ist. Insgesamt ist das elektrische Feld also

$$E_{ges} = E + E' = \frac{1}{aL} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Bei der Gaußschen Box wird ja nur die Oberfläche berücksichtigt. Relevant für das elektrische Feld sind aber nur die Flächen, bei denen das Produkt $\mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{e}_z \neq 0$ ist, also nur die Normalenvektoren auf den Kondensatorflächen, nicht auf den Seiten der Box! Die stehen ja senkrecht auf dem elektrischen Feld, womit das Skalarprodukt Null ist und sie keinen Beitrag liefern. Für die Spannung gilt nun

$$U = \int_0^d E\mathrm{d}z = \frac{1}{aL} \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot d$$

Die Kapazität ergibt sich zu

$$C = \frac{aL\epsilon_0}{d} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

(b) Es ist einfach nur eine Parallelschaltung von zwei Kondensatoren, also gilt für die Kapazität

$$C = C_0 + C_D$$

C_0 ist fast das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe. Es ändert sich lediglich die Fläche:

$$C_0 = \frac{a(L-x)\epsilon_0}{d}$$

Für C_D muss man dann noch ϵ_r berücksichtigen.

$$C_D = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{xa}{d}$$

Insgesamt also:

$$C = \frac{e_0 a}{d}(L - x - \epsilon_r x)$$

Aufgabe 3: Betrachten Sie einen Zylinderkondensator wie in Abbildung 2. Berechnen Sie dessen Kapazität, davon ausgehend, dass er die Ladung Q trage. Wie groß ist die Kapazität, wenn der Zwischenraum mit einem Dielektrikum mit ϵ_r gefüllt ist?

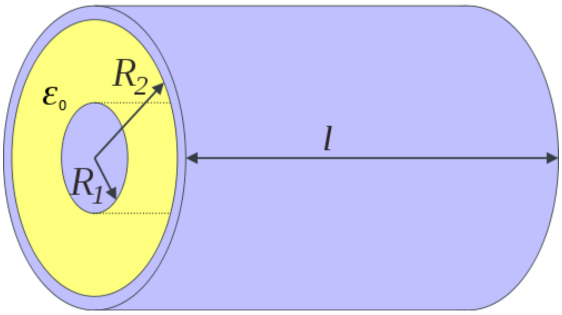

Abbildung 2: Zylinderkondensator

Lösung:

Wieder wie in den vorherigen Aufgaben: Berechnung des elektrischen Feldes zwischen den beiden Zylindern. Der Ansatz ist dieses Mal $\vec{E} = E\vec{e}_r$. Für den Satz von Gauß betrachtet man wieder nur die Oberfläche des Zylinders, wobei die Deckel jeweils keinen Beitrag liefern (senkrecht zum $\vec{E}$-Feld). Also:

$$\int_{\partial Z} E \cdot \mathrm{d}A = 2\pi r l \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}$$

Die Spannung zwischen äußerem und innerem Zylinder wie gewohnt

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E \mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} \mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} [\ln r]_{R_1}^{R_2}$$

Damit ergibt sich die Kapazität des Zylinderkondensators zu

$$C = 2\pi l \epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Aufgabe 4: Es sei ein Spannungsnetzwerk wie ein Abbildung 3 gegeben. Bestimmen Sie das Potential am Punkt P für $U_1 = 6V$, $U_2 = 4V$, $R = 10\Omega$

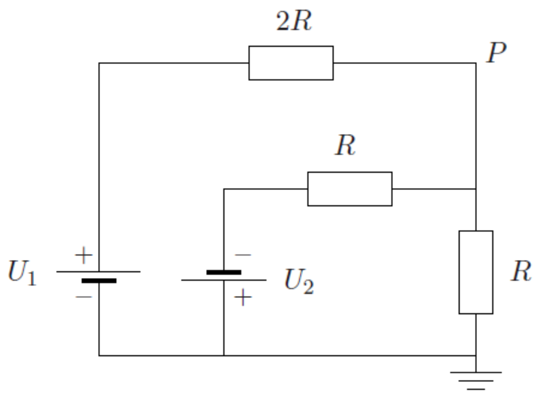

Abbildung 3: Spannungsnetzwerk

Lösung: Zunächst werden die Stromrichtungen durch die Widerstände festgelegt. Hierzu 4. Die erste Frage, die man sich stellen muss, ist, wie das Potential am Punkt P mit den anderen Größen verknüpft ist. Der Punkt befindet sich hinter dem ersten Widerstand und vor dem ersten Knoten. Deshalb ist das Potential an diesem Punkt schlicht

$$U_P = U_1 - 2R \cdot I_1$$

also der durch den Widerstand $2R$ hervorgerufene Spannungsabfall.

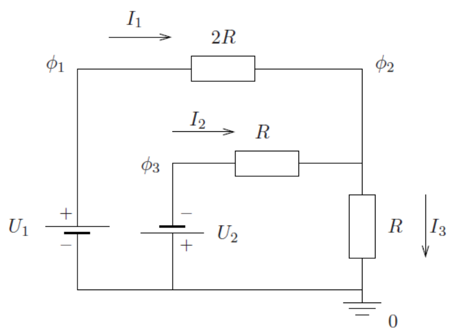

Abbildung 4: Spannungsnetzwerk Lösung

Die unbekannte Größe ist I_1. Dazu stellt man ein Gleichungssystem mithilfe der Kirchhoffschen Regeln auf.

(I) $U_1 - 2RI_1 - RI_3 = 0$

(II) $-U_2 - RI_2 - RI_3 = 0$

(III) $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Beispielsweise Gleichung (III) nach I_3 auflösen und in (I), (II) einsetzen.

(I) $U_1 - 3RI_1 - RI_2 = 0$

(II) $-U_2 - 2RI_2 - RI_1 = 0$

Jetzt geschmeidig nach $2RI_1$ auflösen und in die Gleichung für den Punkt P einsetzen liefert

$$U_P = U_1 - \frac{2}{5}(2U_1 + U_2) = -0.4\text{V}$$

Aufgabe 5: Betrachten Sie zwei konzentrische Leiter die wie in 5 in entgegengesetzter Richtung vom Strom der Stärke I durchflossen werden. Bestimmen Sie die Stromdichte j in den Bereichen $0 < r < \infty$, davon ausgehend, dass sie räumlich konstant ist.

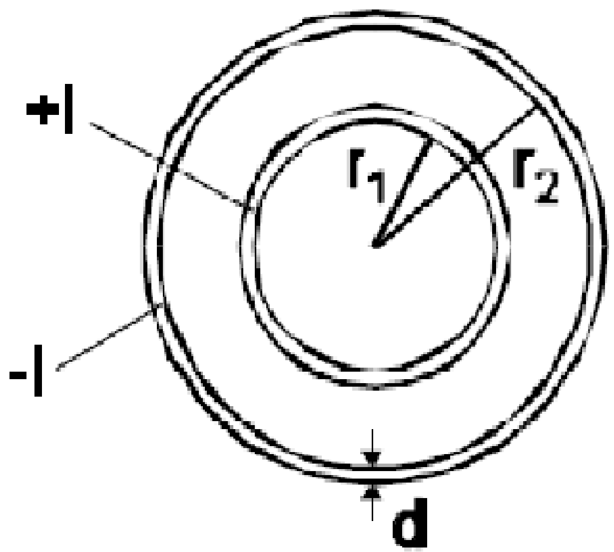

Abbildung 5: Stromdichte

Lösung: Unter Verwendung von

$$I = \int_A \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

kann man nun die entsprechenden Bereiche bestimmen. Für $r < r_1$ ist die Stromdichte Null (es fließt kein Strom). Für das innere Rohr lässt sich berechnen, dass

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{r_1}^{r_1+d} \mathrm{d}r \cdot r \cdot j = 2\pi \cdot [\frac{r^2}{2}]_{r_1}^{r_1+d} j = \pi[(r_1+d)^2 - r_1^2]j$$

Nach der Stromdichte auflösen, ergibt

$$j = \frac{I}{\pi[(r_1+d)^2 - r_1^2]}$$

Analoge Argumentation für das äußere Rohr:

$$j = \frac{I}{\pi[(r_2+d)^2 - r_2^2]}$$

Aufgabe 6: Gegeben sei ein zylinderförmiger ohmscher Leiter mit dem Radius R und der Länge L. An diesen ist über die ideal leitende Deck- und Bodenfläche eine Spannungsquelle der Spannung U angeschlossen (siehe Abbildung 6). Im Leiter verteilt fließt der elektrische Strom entgegen der z-Richtung. Der Betrag der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = -j(r)\vec{e}_z$ im Leiter lautet in Zylinderkoordinaten $j(r) = j_0(2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2)$.

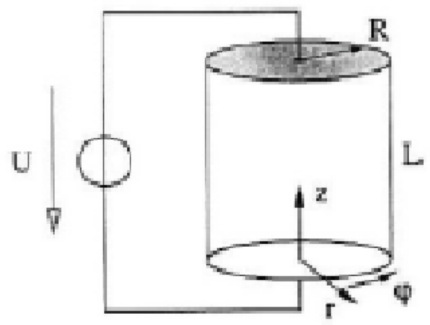

Abbildung 6: Stromdichte

(a) Das elektrische Feld im Inneren des Zylinders sei konstant. Bestimmen sie die Richtung von E.

(b) Berechnen Sie den Strom I, der durch die gesamte Anordnung fließt.

(c) Wie groß ist die im Leiter abfallende Leistung P?

(d) Berechnen Sie Betrag und Richtung der Driftgeschwindigkeit.

Lösung:

(a) Aus

$$U = \int \vec{E} \mathrm{d}\vec{s}$$

folgt, dass das elektrische Feld in negative z-Richtung zeigen muss, also $\vec{E} = -E\vec{e}_z$

(b) Wieder wie in der vorherigen Aufgabe, erhält man unter Berücksichtigung der r-Abhängigkeit der Stromdichte:

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}r \cdot r \cdot j(r) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}r \cdot r \cdot j_0(2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2)$$

Auswertung des Integrals liefert

$$I = \frac{3\pi R^2}{2} \cdot j_0$$

(c) Die Leistung ist

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{3\pi R^2}{2} \cdot j_0$$

(d) Hier sind verschiedene Lösungen zulässig. Die Richtung sollte nur schon $-\vec{e}_z$ sein. Wir verwenden

$$\vec{v}_D = \frac{e\tau_s}{m_e} \cdot \vec{E} = -\frac{e\tau_s}{m_e} \cdot E \cdot \vec{e}_z$$