Aufgabe 1 *Differenzierbarkeit / Punkte: [4, 1, 3, 4]*

Es sei $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$.
Die Polarkoordinatentransformation lautet: $(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x,y)$. Zeigen Sie:

a) f stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$. Verwende $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$.

Lösung:

f stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen. [0,5]

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| \overset{[0,5]}{\leq} \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \overset{[0,5]}{=} \frac{r^3}{r^2}|\cos^3\varphi + \sin^3\varphi| = r|\cos^3\varphi+\sin^3\varphi|$$

$$\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\varphi) = \lim_{r\to 0} r|\cos^3\varphi + \sin^3\varphi| = 0 \quad [1]$$

Also f stetig in $(0,0)$. [0,5]

b) f differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Lösung:

$(x,y) \neq (0,0)$: f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar [1]

c) f in $(0,0)$ in alle Richtungen differenzierbar (**Tipp:** Polarkoordinaten, $\vec{e} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $|\vec{e}| = 1$)

Lösung:

Wir betrachten f in Polarkoordinaten:

$$f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = \frac{\sin\left(t^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)\right)}{t^2} \quad [1]$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} \overset{[0,5]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(t^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)\right)}{t^3} \overset{\text{t klein}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(t^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{t^3} \overset{[0,5]}{=} \cos^3\varphi + \sin^3\varphi$$

Wir haben die Kleinwinkelnäherung $\sin x = x$ [1] für kleine x verwendet. Dies ist zulässig, da wir ja wirklich kleine x betrachten. Wir können also den Grenzwert berechnen, also existieren die Richtungsableitungen.

d) f in $(0,0)$ nicht differenzierbar

Lösung:

Hier muss man sofort „den Braten riechen“: $\nabla f(0,0) \cdot \vec{e} \neq \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{e}}$. [1] Dies wollen wir nun zeigen:
Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen (Kleinwinkelnäherung):

$$f_x(0,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^3} = 1 \quad [1]$$

$$f_y(0,0) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y^3}{y^3} = 1 \quad [1]$$

Also $\nabla f = (1,1)^T$. Hiermit prüfen wir unsere Behauptung:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{e}} \stackrel{?}{=} \nabla f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{[0,5]}{=} \cos\varphi + \sin\varphi \stackrel{[0,5]}{\neq} \cos^3\varphi + \sin^3\varphi \Longrightarrow \text{ Behauptung}$$

Aufgabe 2 *Vektoranalysis / Punkte: [3, 3, 2]*

Sei $v : D \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit

$$v(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} x-z+2 \\ 0 \\ x+z-1 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $rot v(x,y,z)$

b) Was ist ein Vektorpotential? Ist es im Allgemeinen eindeutig bestimmt? Begründe.

c) Es gilt:

☐ Der Definitionsbereich von v ist sternförmig.

☐ v ist nicht überall konservativ

☐ Das Kurvenintegral entlang des Einheitskreises verschwindet

Lösung:

a) $\nabla \times \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} x-z+2 \\ 0 \\ x+z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z \frac{x-z+2}{\sqrt{x^2+z^2}} - \partial_x \frac{x+z-1}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x^2+xz+2z}{(x^2+z^2)^{3/2}} - \frac{z^2-xz+x}{(x^2+z^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix} =$
$-\frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2+z^2+2z+x \\ 0 \end{pmatrix}$ [3]

b) Kann man eine Vektorfeld schreiben als $\vec{v} = \nabla \times \vec{w}$, so nennt man $\vec{w}$ ein Vektorfeld [1]. Dieses ist nur eindeutig bis auf ein additives Gradientenfeld [1], da $\nabla \times (\vec{w} + \nabla g) = \nabla \times \vec{w} + \nabla \times \nabla g = \nabla \times \vec{w}$ [1].

c) Es gilt: [2]

☐ Der Definitionsbereich von v ist sternförmig.

Aufgrund des Nenners ist z.B. der Ursprung nicht in D

☒ v ist nicht überall konservativ

Da die Rotation nicht für alle Raumpunkte gleich 0 ist

☐ Das Kurvenintegral entlang des Einheitskreises verschwindet

v ist nicht radial und rotv $\neq 0$

Aufgabe 3 *Topologie / Punkte: [6]*

Zeigen Sie den folgenden Satz: Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Lösung:

Wir verwenden den aus der Vorlesung bekannten Satz für eine Funktion h:
h stetig $\iff$ Urbilder offener Mengen sind offen. [2]

Sei nun $V \subset Z$ offen in Z. [1]
Weil g stetig, folgt mit obigem Satz, dass $g^{-1}(V)$ offen in Y. [1]
Da f stetig ist, ist $f^{-1}(g^{-1}(V))$ offen in X. [1]
Außerdem ist $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$. Damit folgt die Behauptung. [1]

Bemerkung: Natürlich darf man den Beweis analog auch mit abgeschlossenene Mengen durchführen. Diese Formulierung ist nach dem Beweis in der Übung äquivalent.

Aufgabe 4 *Taylorentwicklung / Punkte: [3,7]*

Man bestimme die Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung der folgenden Funktionen:

a) $g(x,y) = e^x \ln(1+y)$ für $(x,y) = (0,0)$

Lösung:

Wir verwenden die bekannten Reihen: $e^x = 1 + x + x^2/2 + \dots$ [1] und $\ln(1+y) = y - y^2/2 \pm \dots$ [1]

Dann ist: $g(x,y) \approx (1 + x + x^2/2)(y - y^2/2) \overset{[1]}{\approx} y + xy - y^2/2$

b) $f(x,y) = \sin(xy)$ für $(x,y) = (1, \pi/2)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &\overset{[0,5]}{=} \sin(xy) & & & f(1,\pi/2) &\overset{[0,5]}{=} 1 \\
f_x(x,y) &\overset{[0,5]}{=} y\cos(xy) & & & f_x(1,\pi/2) &\overset{[0,5]}{=} 0 \\
f_y(x,y) &\overset{[0,5]}{=} x\cos(xy) & &\Longrightarrow & f_y(1,\pi/2) &\overset{[0,5]}{=} 0 \\
f_{xx}(x,y) &\overset{[0,5]}{=} -y^2\sin(xy) & & & f_{xx}(1,\pi/2) &\overset{[0,5]}{=} -\pi^2/4 \\
f_{xy}(x,y) &\overset{[0,5]}{=} \cos(xy) - yx\sin(xy) & & & f_{xy}(1,\pi/2) &\overset{[0,5]}{=} -\pi/2 \\
f_{yy}(x,y) &\overset{[0,5]}{=} -x^2\sin(xy) & & & f_{yy}(1,\pi/2) &\overset{[0,5]}{=} -1
\end{aligned}$$

Somit lautet die vollständige Entwicklung:

$$f(x,y) \approx 1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{2}(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad [1]$$

Aufgabe 5 *Extrema unter Nebenbedingungen*

Bestimme diejenigen Punkte auf der Oberfläche eines Ellipsoids $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, die vom Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ den kleinsten bzw. größten Abstand haben!

Lösung:
Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ [2] unter der Nebenbedingung $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 = 0$ [0.5]

$$\nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{2}{9}y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [3]$$

Mit der Nebenbedingung führt das zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda x &= 4(x-1) \\ \lambda y &= 9(y-1) \qquad [1] \\ \lambda z &= z-1 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 = 0 \quad [0.5]$$

Punktabzug, wenn nicht erkannt wird, dass die Nebenbedingung auch Teil des Gleichungssystems ist!

Aufgabe 6 *Matrixfunktion / Punkte: [3]*

Bestimmen Sie die Ableitung $f'(A)(B)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^2$ mit Hilfe der Definition der Ableitung.

Lösung:

$$[1] \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(A+tB) - f(A)}{t} \overset{[0,5]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(A+tB)^2 - A^2}{t} \overset{[0,5]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{A^2 + tAB + tBA + t^2B^2 - A^2}{t}$$
$$\overset{[0,5]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{tAB + tBA}{t} + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{t^2B^2}{t}}_{=0} = \lim_{t\to 0} AB + BA \overset{[0,5]}{=} AB + BA$$

Aufgabe 7 *Implizite Funktionen / Punkte: [6,3]*

$$f(x,y,z) = 1 - z + e^{-2z} \cdot \cos(x-y) = 0$$

a) Man zeige, dass sich f in der Umgebung des Punktes (π,0,0) als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $z = g(x,y)$ darstellen lässt!

b) Man berechne grad g(π,0)!

Lösung:

a) $P \in \{(x,y,z); f(x,y,z) = 0\}$, da $f(\pi,0,0) = 1 - 0 + e^0 \cdot \cos(\pi - 0) = 0$ [1]
$\partial_x f(x,y,z) = -e^{-2z}\sin(x-y)$ [0.5]
$\partial_y f(x,y,z) = e^{-2z}\sin(x-y)$ [0.5]
$\partial_z f(x,y,z) = -1 - 2e^{-2z}\cos(x-y)$ [0.5]
$\Rightarrow$ f ist stetig differenzierbar [0.5]
$\partial_z f(\pi,0,0) = -1 - 2e^0 \underbrace{\cos(\pi - 0)}_{=-1} = 1 \neq 0$ [1]
Die implizite Funktion $f(x,y,z) = 0$ erfüllt die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen. Also lässt sich $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgegung von P nach z auflösen. [2]

b) $\operatorname{grad} g(\pi,0,0) \overset{[2]}{=} \begin{pmatrix} -\frac{\partial_x f(\pi,0,0)}{\partial_z f(\pi,0,0)} \\ -\frac{\partial_x f(\pi,0,0)}{\partial_z f(\pi,0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{0}{1} \\ -\frac{0}{1} \end{pmatrix} \overset{[1]}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8 *Mannigfaltigkeiten / Punkte: [5]*

Bestimmen Sie, ob die Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0 = yz\} \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ darstellt.

Lösung:

Wir finden schreiben die Jacobi-Matrix auf:

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix} \quad [2]$$

Hier braucht man nicht allzu scharf hinsehen, um Fälle zu finden, wo die Matrix nicht vollen Rang hat. Leicht wäre zum Beispiel $y = 0$. Nun sind die Zeilen linear abhängig, die Matrix hat *Rang* $J_f = 1$ [1], die Punkte sind im Definitionsbereich von f. [1] Somit ist M keine Untermannigfaltigkeit. [1]

Aufgabe 9 *Gewöhnliche Differentialgleichungen / Punkte: [6]*

Bestimme das erste Integral:

$$y'(x) = x \cdot \frac{3y^3 + 3y - 1}{3y^2 + 1}$$

Lösung:

$$F(x, y) \overset{[2]}{=} \int \frac{3y^2 + 1}{3y^3 + 3y - 1} dy - \int x dx \overset{[2]}{=} \ln \left|3y^3 + 3y - 1\right| - \frac{1}{2}x^2 \overset{[1]}{=} \text{const}$$

wobei $\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$ [1]. $F(x, t)$ ist eine Konstante der Bewegung.

Aufgabe 10 *Fläche im $\mathbb{R}^3$ / Punkte: [4, 3, 3, 3]*

a) Eine Fläche ist implizit durch $g(x, y, z) = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass für eine Fläche $g(x, y, f(x, y))$, die als Graph einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben ist, im Punkt $P = (x, y, f(x, y))$ gilt: Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene (also der Gradient von g) ist gegeben durch

$$\nabla g = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, -1 \right)^T =: \vec{n}$$

Hinweis: Sie brauchen nicht zu beweisen, dass der Gradient von g ein Normalenvektor ist, das wissen Sie bereits aus der Vorlesung. Zeigen Sie lediglich, dass sich der Gradient von g so darstellen lässt.

Lösung:

Nach der Definition oben ist also $f(x, y) = z$. Wir stellen dies so um: $0 = f(x, y) - z$. Damit definieren wir uns die Funktion $g(x, y, z) = 0 = f(x, y) - z$. [1] Nun bilden wir den Gradienten von g:

$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial (f(x, y) - z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad [1]$$
$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial (f(x, y) - z)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad [1]$$
$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial (f(x, y) - z)}{\partial z} = \frac{\partial (-z)}{\partial z} = -1 \quad [1]$$

Wir fassen dies zu einem Vektor zusammen und erhalten das oben angegebene Ergebnis.

Bemerkung: Es ist auch möglich, mit der Auflösung $g(x, y, z) = 0 = z - f(x, y)$ zu rechnen, man erhält dann gerade den Gradienten mit einem Faktor -1. Dies ist logisch, da er genau in die entgegengesetzte Richtung zeigt - jede Ebene hat 2 Normalenvektoren.
Mit der Begründung, dass alle Vektoren der Form $\lambda\vec{n}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ Normalenvektoren sind (das wissen Sie aus der linearen Algebra oder der Vorlesung), wird auch dieser Weg als richtig bewertet.

Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y - 3y$. Berechnen Sie:

b) Die Schnittkurven von $f(x,y)$ mit den Ebenen $E_1 : x = 4$ und E_2 $y = 3$. Welche Form haben die Schnittkurven?

Lösung:

Setze ein: $(x,y) = (4,t) \Longrightarrow f_{E_1}(t) = (4,t,f(4,t)) = (4,t,13t)$. [1] Dies ist eine Gerade. [0,5]
Setze ein: $(x,y) = (t,3) \Longrightarrow f_{E_2}(t) = (t,3,f(t,3)) = (t,3,3t^2-9)$. [1] Dies ist eine Parabel. [0,5]

c) Die Tangentenvektoren dieser Kurven in $(4,3,f(4,3))$ (**nicht** die vollständige Tangente).

Lösung:

Nach Teilaufgabe ist $\nabla g(4,3,f(4,3)) = (\nabla f, -1)^T$.
Es ist $(\nabla f)^T\big|_{(4,3)} = (2xy, x^2-3)^T\big|_{(4,3)} = (24,13)$ [0,5]. Also ist $\nabla g = (24,13,-1)^T$ [0,5].
Wir suchen nun Vektoren, deren x- bzw. y-Anteil verschwindet (damit sie in den Ebenen liegen) und deren Skalarprodukt mit $\nabla g = (24,13,-1)^T$ Null ist. Dies sind dann die gesuchten Tangentenvektoren.
Wir finden diese leicht durch scharfes Hinsehen: $\vec{t}_{E_1} = (0,1,13)^T$ [1] und $\vec{t}_{E_2} = (1,0,24)^T$ [1] oder λ-fache davon.

d) Die Ebene, die von ihnen in diesem Punkt aufgespannt wird in Koordinatendarstellung $E : ax+by+cz = d$

Lösung:

Wir wissen, dass die gesuchte Ebene Tangentialebene im Punkt $\vec{x}_0 = (4,3,39)^T$ an unsere Fläche mit dem berechneten Normalenvektor $\vec{n}$ ist. Die einfachste und schnellste Variante führt daher über die Hesse-Normalenform wie in der Übung:

$$[1] \quad \vec{n}\cdot\vec{x}_0 = \vec{n}\cdot\vec{x} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad [1]$$

Jetzt werden beide Skalarprodukte ausgeführt und wir erhalten sofort die gewünschte Darstellung:
$E : 24x + 13y - z = 96$ [1]