Aufgabe 1 *Differenzierbarkeit* / *Punkte: [4, 1, 3, 4]*

Es sei $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$.
Die Polarkoordinatentransformation lautet: $(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x,y)$. Zeigen Sie:

a) f ist stetig in ganz $\mathbb{R}^2$. Verwende $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$.

b) f differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

c) f in $(0,0)$ in alle Richtungen differenzierbar (**Tipp:** Polarkoordinaten, $\vec{e} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $|\vec{e}| = 1$)

d) f in $(0,0)$ nicht differenzierbar

Aufgabe 2 *Vektoranalysis* / *Punkte: [3, 3, 2]*

Sei $v : D \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit

$$v(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} x-z+2 \\ 0 \\ x+z-1 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $\operatorname{rot} v(x,y,z)$!

b) Was ist ein Vektorpotential? Ist es im Allgemeinen eindeutig bestimmt? Begründe.

c) Es gilt:

- ☐ Der Definitionsbereich von v ist sternförmig.
- ☐ v ist nicht überall konservativ
- ☐ Das Kurvenintegral entlang des Einheitskreises verschwindet

Aufgabe 3 *Topologie* / *Punkte: [6]*

Zeigen Sie den folgenden Satz: Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Aufgabe 4 *Taylorentwicklung* / *Punkte: [3,7]*

Man bestimme die Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung der folgenden Funktionen:

a) $g(x,y) = e^x \ln(1+y)$ für $(x,y) = (0,0)$

b) $f(x,y) = \sin(xy)$ für $(x,y) = (1, \pi/2)$

Aufgabe 5 *Extrema unter Nebenbedingungen* / *Punkte: [7]*

Bestimme nur das Gleichungssystem, um diejenigen Punkte auf der Oberfläche eines Ellipsoids $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, die vom Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ den kleinsten bzw. größten Abstand haben, zu finden!

Aufgabe 6 *Matrixfunktion* / *Punkte: [3]*

Bestimmen Sie die Ableitung $f'(A)(B)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^2$ mit Hilfe der Definition der Ableitung.

Aufgabe 7 *Implizite Funktion / Punkte: [6,3]*

$$f(x, y, z) = 1 - z + e^{-2z} \cdot \cos(x - y) = 0$$

a) Man zeige, dass sich f in der Umgebung des Punktes (π,0,0) als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $z = g(x, y)$ darstellen lässt.

b) Man berechne grad g(π,0)

Aufgabe 8 *Mannigfaltigkeiten / Punkte: [5]*

Bestimmen Sie, ob die Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0 = yz\} \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ darstellt.

Aufgabe 9 *Gewöhnliche Differentialgleichungen / Punkte: [6]*

Bestimme das erste Integral:

$$y'(x) = x \cdot \frac{3y^3 + 3y - 1}{3y^2 + 1}$$

Aufgabe 10 *Fläche im $\mathbb{R}^3$ / Punkte: [4, 3, 3, 3]*

a) Eine Fläche ist implizit durch $g(x, y, z) = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass für eine Fläche $g(x, y, f(x, y))$, die als Graph einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben ist, im Punkt $P = (x, y, f(x, y))$ gilt: Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene (also der Gradient von g) ist gegeben durch

$$\nabla g = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, -1 \right)^T =: \vec{n}$$

Hinweis: Sie brauchen nicht zu beweisen, dass der Gradient von g ein Normalenvektor ist, das wissen Sie bereits aus der Vorlesung. Zeigen Sie lediglich, dass sich der Gradient von g so darstellen lässt.

Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y - 3y$. Berechnen Sie:

b) Die Schnittkurven von $f(x, y)$ mit den Ebenen $E_1 : x = 4$ und E_2 $y = 3$. Welche Form haben die Schnittkurven?

c) Die Tangentenvektoren dieser Kurven in $(4, 3, f(4, 3))$ (**nicht** die vollständige Tangente).

d) Die Ebene, die von ihnen in diesem Punkt aufgespannt wird in Koordinatendarstellung $E : ax+by+cz = d$