Aufgabe 1 *Wiederholung: Taylorreihe*

Gib die Taylorreihe von $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ bis zur dritten Ordnung um $x_0 = 1$ an!

Lösung:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + O\left((x-1)^4\right)$$

Aufgabe 2 *Extremalstellen I*

Berechne die Extremstellen der folgenden Funktionen und bestimme, von welcher Art sie sind!

a) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 3$

b) $f(x,y,z) = 29 - (x^2 + y^2 + z^2)$

Lösung:

a) $(0,0)$ ist stationärer Punkt, $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Die Hesse-Matrix ist somit positiv definit und der Ursprung ist ein **globales Minimum**.

b) stationärer Punkt ist der Ursprng $(0,0,0)$. Die Hessematrix lautet $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Damit ist der Ursprung **globales Maximum**.

Aufgabe 3 *Extremalstellen II*

Sei $f(x,y) = 1 - x^3 - y^2 + x^3y^2$, x,$y \in \mathbb{R}$

a) Bestimme und klassifiziere die kritischen Punkte von f!

b) Bestimme und klassifiziere die lokalen Extrema von f entlang der Kurve $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(t^{\frac{1}{3}}, t^{\frac{1}{2}}\right)$!

Lösung:

a) $0 = \mathrm{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 3x^2y^2 \\ -2y + 2x^3y \end{pmatrix}$
Es muss also $x^2(1-y^2) = 0$ und $y(1-x^3) = 0$ erfüllt sein.
1. Fall: $x = 0$. Dann folgt aus der zweiten Gleichung $y = 0$.
2. Fall: $x \neq 0$. Dann folgt aus der ersten Gleichung $y = \pm 1$ und aus der zweiten $x = 1$.
Die Hessematrix von f ist $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x(y^2-1) & 6x^2y \\ 6x^2y & 2(x^3-1) \end{pmatrix}$

- Da $f(x,0) = 1-x^3$, ist im Punkt (0,0) kein lokales Minimum oder Maximum, sondern ein Sattelpunkt.
- $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (Eigenwerte ± 6), also ist (1,1) ein Sattelpunkt.
- $H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (Eigenwerte ± 6), also ist (1,-1) ein Sattelpunkt.

b) Mit $g := f \circ \gamma$ ist $g(t) = 1 - t - t + t^2 = (1-t)^2$, eine Parabel mit Scheitel bei $t = 1$ auf $\mathbb{R}_0^+$. Somit hat g sein absolutes Minimum 0 bei $t = 1$ und ein lokales Maximum 1 bei $t = 0$.

Aufgabe 4 *Lagrange-Multiplikatoren*

a) Berechne das maximale Volumen eines Quaders mit einer Oberfläche von 10 m^2!

b) Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x - 2y + 2z$, auf dem Schnitt der Oberflächen der Einheitssphären um $(0, 0, 0)$ und $(0, 0.5, 0)$?

Lösung:

a) Das Volumen ist die Funktion $f(x, y, z) = xyz$
Die Nebenbedingung lautet $g(x, y, z) = 2(xy + xzyz + yz) - 10 = 0$
Folgende Gleichungen müssen gelöst werden:

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda(y + z) \\ xz &= 2\lambda(x + z) \\ xy &= 2\lambda(y + x) \\ xy + xz + yz &= 5 \end{aligned}$$

Man stelle fest, dass $x \neq 0$, analog $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x + y \neq 0$, $x + z \neq 0$, $y + z \neq 0$. Eliminiere λ:

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z} \qquad \Rightarrow \qquad x = y$$

Analog $y = z$. Einsetzen in die letzte Gleichung liefert $3x^2 = 5$. Also ist

$$x = y = z = \sqrt{\frac{5}{3}} \qquad \text{und} \qquad V = xyz = \left(\frac{5}{3}\right)^{3/2}$$

Das entspricht dem Maximum, während das Minimum hier liegt:

$$x = y = z = -\sqrt{\frac{5}{3}} \qquad \text{und} \qquad V = xyz = -\left(\frac{5}{3}\right)^{3/2}$$

Da wir aber nicht von negativen Längen ausgehen wollen, ist das Minimum „unphysikalisch“.

b) $f(x, y, z) = 2x - 2y + 2z$,
$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$,
$g_2(x, y, z) = x^2 + (y - 0.5)^2 + z^2 - 1$

$$\nabla f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z) =$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 1 \\ 2z \end{pmatrix} = 0$$

Die Jacobi-Matrix $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y - 0.5 & z \end{pmatrix}$ hat in jedem Punkt der Nebenbedingungsmenge vollen Rang. Es genügt also das sich ergebende Gleichungssystem nach den kritischen Punkten zu lösen:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - x\lambda_1 - x\lambda_2 \\ 0 &= -2 - 2y\lambda_1 - 2y\lambda_2 + \lambda_2 \\ 0 &= 1 - z\lambda_1 - z\lambda_2 \\ 0 &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 0 &= x^2 + (y - 0.5)^2 + z^2 - 1 \end{aligned}$$

Subtrahiert man die letzten beiden Gleichungen voneinander, so erhält man direkt $y = \frac{1}{4}$. Die erste und die dritte Gleichung ergeben $x = z = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ und die zweite liefert $y = \frac{\lambda_2 - 2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$. Setzt man $y = \frac{1}{4}$ wieder in die vierte Gleichung ein, ergibt sich $x = z = \pm\sqrt{\frac{15}{32}}$, also sind die kritischen Punkte

$$(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{4}(\pm\sqrt{\frac{15}{2}}, 1, \pm\sqrt{\frac{15}{2}})$$

Da die Nebenbedingungsmenge kompakt und f stetig ist, muss ein Minimum und ein Maximum existieren und die Lösung mit „+“ ist das Maximum und diejenige mit „-“ ist das Minimum.

Aufgabe 5 *DGL höherer Ordnung und DGL-Systeme*

Wandle folgende Differentialgleichungen höherer Ordnung in Differentialgleichungssysteme um (Teilaufgabe a und b) bzw. umgekehrt (Teilaufgabe c):

a) $m\ddot{x} + kx = 0$

b) $\ddot{\ddot{z}} + 4\ddot{z} + 4z = \sin(\omega t)$

c) $$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= x_3 \\ \dot{x_3} &= ax_2 + b^2 \end{aligned}$$

Lösung:

a) $$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -\frac{k}{m}x_1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 \\ \dot{z_2} &= z_3 \\ \dot{z_3} &= z_4 \\ \dot{z_4} &= -4z_3 - 4z_1 + \sin(\omega z_5) \\ \dot{z_5} &= 1 \end{aligned}$$

c) $\dddot{x} - a\dot{x} = b^2$

Aufgabe 6 *Matrixexponential*

a) Berechne das Marixexponential der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Die Transformationsmatrizen müssen nicht berechnet werden!

b) Löse das Anfangswertproblem $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das Inverse von $\begin{pmatrix} \frac{1}{72} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}$ *ist* $T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 4$

$$e^{Bt} = T \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

b) Die Matrix hat die Eigenwerte 5, -4 und -3. Die Eigenräume zu diesen EW sind

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des AWP ergibt sich zu

$$T \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} T^{-1}\vec{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(e^{5t} - e^{-3t}\right) \\ e^{5t} \\ \frac{1}{8}\left(e^{5t} - e^{-3t}\right) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 *Trennung der Variablen*

a) Löse folgendes AWP durch Trennung der Variablen:

$$y' = y^2 \sin(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0 = 0) = 1$$

b) Gegeben ist die DGL $\dot{x} = f(t, x)$ mit $f(t, x) = \sin(t)e^{2x}$.

(i) Gib ein erstes Integral für die DGL an.

(ii) Gib eine maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(t, x)$ mit $x(t_0 = \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\ln(2)$ an.

(iii) Nenne eine Eigenschaft von f, die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des obigen AWPs garantiert.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^2 \sin(x) \\
\Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int_{x_0}^{x} \sin(x)\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right) &= -\left(\cos(x) - \cos(x_0)\right) \\
\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{1}{y} - 1\right) &= -\left(\cos(x) - 1\right) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} &= \cos(x) \\
\Leftrightarrow \quad y(x) &= \frac{1}{\cos(x)}
\end{aligned}$$

b) $\dot{x} = f(t, x)$ mit $f(t, x) = \sin(t)e^{2x}$

(i) Trennung der Variablen ergibt:

$$\dot{x}e^{-2x} = \sin(t)$$

Damit ist $F(t, x) = \int e^{-2x}\mathrm{d}x - \int \sin(t)\mathrm{d}t$ eine Konstante der Bewegung, d. h. ein erstes Integral. Auflösen des Integrals ergibt:

$$F(t, x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \cos(t)$$

(ii) $F(t_0, x_0) = F(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\ln(2)) = -\frac{1}{2}e^{\ln(2)} = -1$. Da F konstant ist, gilt

$$-1 = F(t_0, x_0) = F(t, x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \cos(t)$$

Aufgelöst nach x erhält man:

$$x(t) = -\frac{1}{2}\ln(2 + 2\cos t)$$

Der maximale Definitionsbereich ist gegeben durch $D_{\max} =]-\pi; \pi[$, da hier das Argument des Logarithmus positiv ist.

(iii) f ist stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ (und damit natürlich auch lokal Lipschitz-stetig). Dies ist eine hinreichende Bedingung für lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Aufgabe 8 *Unmöglichkeit Oszillationen in 1D*

„In einem eindimensionalen System $\dot{x} = f(x)$ gibt es nie Oszillationen.“

a) Welche weiteren Möglichkeiten gibt es dann für die Lösung der Gleichung, wenn die periodische nicht möglich ist?

b) Erkläre, warum Oszillationen keine Lösung des eindimensionalen Systems sein können!

c) Der lineare harmonische Oszillator mit Dämpfung schwingt entlang einer Dimension - wie ist das vereinbar mit obiger Aussage? (*Betrachte hierzu die Differentialgleichung, die den LHO beschreibt!*)

d) Unter welchen physikalischen Voraussetzungen hat ein linearer harmonischer Oszillator mit Dämpfung keine oszillierenden Lösungen?

Lösung:

a) stationäre Lösungen (Fixpunkt) und monotone Divergenz gegen $\pm\infty$

b) Um eine Oszillation durchzuführen, müsste das System zu einem bereits durchlaufenen Punkt zurückkehren. Das ist im 1D aber unmöglich, da die vollständige Dynamik des Systems entlang einer Phasenraumkurve verläuft, auf der man nicht einfach „umdrehen“ kann, da sonst die Eindeutigkeit verletzt wäre. Weitere Erklärung: Im 1D ist es immer möglich, $f(x) = -\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}$ zu schreiben.
Da $f(x) = \frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx}$ ist $\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right) \leq 0$ und das Testteilchen bewegt sich immer in Richtung des niedrigeren Potentials ohne zurückzukehren oder verharrt im Gleichgewicht.

c) $m\ddot{x} - \eta\dot{x} + kx = 0$ ist eine Gleichung zweiter Ordnung und kann auch in ein System zweiter Ordnung überführt werden. Somit ist die obige Aussage nicht verletzt.

d) Ist der Trägheitsterm vernachlässigbar $m\ddot{x} \approx 0$, so reduziert sich die DGL auf eine Gleichung erster Ordnung. Man stelle sich eine Feder in Honig vor: Die Dämpfung überwiegt, sodass keine vollständige Schwingung mehr ausgeführt werden kann.