Carla Zensen
Aufgaben Donnerstag

Ferienkurs Analysis 2 für Physiker
SS 2012

Aufgabe 1 *Wiederholung: Taylorreihe*

Gib die Taylorreihe von $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ bis zur dritten Ordnung um $x_0 = 1$ an!

Aufgabe 2 *Extremalstellen I*

Berechne die Extremstellen der folgenden Funktionen und bestimme, von welcher Art sie sind!

a) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 3$

b) $f(x,y,z) = 29 - (x^2 + y^2 + z^2)$

Aufgabe 3 *Extremalstellen II*

Sei $f(x,y) = 1 - x^3 - y^2 + x^3y^2$, x,$y \in \mathbb{R}$

a) Bestimme und klassifiziere die kritischen Punkte von f!

b) Bestimme und klassifiziere die lokalen Extrema von f entlang der Kurve $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(t^{\frac{1}{3}}, t^{\frac{1}{2}}\right)$!

Aufgabe 4 *Lagrange-Multiplikatoren*

a) Berechne das maximale Volumen eines Quaders mit einer Oberfläche von 10 m^2!

b) Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x - 2y + 2z$, auf dem Schnitt der Oberflächen der Einheitssphären bei $(0,0,0)$ und $(0,0.5,0)$?

Aufgabe 5 *DGL höherer Ordnung und DGL-Systeme*

Wandle folgende Differentialgleichungen höherer Ordnung in Differentialgleichungssysteme um (Teilaufgabe a und b) bzw. umgekehrt (Teilaufgabe c):

a) $m\ddot{x} + kx = 0$

b) $\dddot{z} + 4\ddot{z} + 4z = \sin(\omega t)$

c) $$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= x_3 \\ \dot{x_3} &= ax_2 + b^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 *Matrixexponential*

a) Berechne das Marixexponential der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Die Transformationsmatrizen müssen nicht berechnet werden!

b) Löse das Anfangswertproblem $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das Inverse von $\begin{pmatrix} \frac{1}{72} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}$ *ist* $T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 *Trennung der Variablen*

a) Löse folgendes AWP durch Trennung der Variablen:

$$y' = y^2 \sin(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0 = 0) = 1$$

b) Gegeben ist die DGL $\dot{x} = f(t,x)$ mit $f(t,x) = \sin(t)e^{2x}$.

   (i) Gib ein erstes Integral für die DGL an.

   (ii) Gib eine maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(t,x)$ mit $x(t_0 = \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\ln(2)$ an.

   (iii) Nenne eine Eigenschaft von f, die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des obigen AWPs garantiert.

Aufgabe 8 *Unmöglichkeit Oszillationen in 1D*

„In einem eindimensionalen System $\dot{x} = f(x)$ gibt es nie Oszillationen.“

a) Welche weiteren Möglichkeiten gibt es dann für die Lösung der Gleichung, wenn die periodische nicht möglich ist?

b) Erkläre, warum Oszillationen keine Lösung des eindimensionalen Systems sein können!

c) Der lineare harmonische Oszillator mit Dämpfung schwingt entlang einer Dimension - wie ist das vereinbar mit obiger Aussage? (*Betrachte hierzu die Differentialgleichung, die den gedämpften LHO beschreibt!*)

d) Unter welchen physikalischen Voraussetzungen hat ein linearer harmonischer Oszillator mit Dämpfung keine oszillierenden Lösungen?