Aufgabe 1 *Äquivalente Aussagen für Stetigkeit*(∗∗)

Beweisen Sie folgenden Satz: Seien X und Y metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (I) f stetig
- (II) $f^{-1}(V)$ offen für jedes $V \subset Y$ offen
- (III) $f^{-1}(A)$ abgeschlossen für jedes $A \subset Y$ abgeschlossen

Gehen Sie praktischerweise folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie zuerst (I) $\Rightarrow$ (II). Bedenken Sie hierbei, dass eine stetige Abbildung Punkte in einer Umgebung um ein x_0 im Bild in eine Umgebung des Bildpunktes $f(x_0)$ abbildet. (Letztere Aussage brauchen Sie nicht zu zeigen, diese können Sie als gegeben annehmen.)

Lösung:

Sei $V \subset Y$ offen. Sei $x_0 \in f^{-1}(V) \Longrightarrow f(x_0) \in V \Longrightarrow V$ Umgebung von $f(x_0)$, weil V offen
$\overset{\text{Hinweis}}{\Longrightarrow} f^{-1}(V)$ Umgebung von x_0 und weil x_0 beliebig $\Longrightarrow f^{-1}(V)$ offen
Anmerkung: Der Hinweis ist genau die Definition der Stetigkeit.

b) Zeigen Sie (II) $\Rightarrow$ (I) mit Hilfe des ϵ-δ-Kriteriums:
f stetig $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X$ mit $d(x_0, x) < \delta : d(f(x_0), f(x)) < \epsilon$

Lösung:

Sei $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$. $f^{-1}(\overbrace{U_\epsilon(f(x_0))}^{\text{offen}})$ offen nach Voraussetzung.
$\Longrightarrow \exists \delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$, weil $x_0 \in f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$
d.h. $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ für alle $x \in X$, $d(x, x_0) < \delta$
$\Longrightarrow f$ stetig in x_0 für alle $x_0 \in X \Longrightarrow f$ stetig

c) Zeigen Sie (II) $\Rightarrow$ (III). Hier ist es geschickt, $Y \backslash A$ zu betrachten. Haben Sie dies bewiesen, so folgt (III) $\Rightarrow$ (II) analog dazu. Dies brauchen Sie dann nicht mehr zu zeigen.

Lösung:

Sei $A \subset Y$ abgeschlossen $\Longrightarrow Y \backslash A$ offen $\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} f^{-1}(Y \backslash A)$ offen
$f^{-1}(Y \backslash A) = X \backslash f^{-1}(A) \Longrightarrow f^{-1}(A)$ abgeschlossen

Hier sieht man leicht, dass der Weg zurück analog dazu funktioniert.

Aufgabe 2 *Hausdorff-Eigenschaft* (∗)

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum $(M; d)$ gilt: je zwei verschiedene Punkte haben disjunkte Umgebungen, d.h. $\forall x, y \in M, x \neq y \exists$ Umgebung U von x, Umgebung V von y mit: $U \cap V = \phi$.

Lösung:

$x \neq y \Longrightarrow d(x, y) = r \neq 0$. Setze $\epsilon \leq \frac{r}{2}$ und $U = U_\epsilon(x), V = U_\epsilon(y)$
Damit ist sichergestellt, dass $U \cap V = \phi$, denn: Sei $z \in U$, dann:
$2\epsilon \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \epsilon + d(z, y) \Longrightarrow d(z, y) > \epsilon$

Aufgabe 3 $\mathbb{Q}$ *liegt dicht in* $\mathbb{R}$ $(**)$

Zeigen Sie, dass der Abschluss von $\mathbb{Q}$ ganz $\mathbb{R}$ ist. Sie tun sich sehr leicht, das zu zeigen, wenn Sie zunächst beweisen, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Letzteres können Sie tun, indem Sie zeigen: $x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x \in \partial\mathbb{Q}$

Hinweis: Es genügt „$\Longrightarrow$" der letztgenannten Äquivalenz zu zeigen, die Rückrichtung wird nicht benötigt. Dann ist der Rest des Beweises trivial.

Lösung:

Zeige: $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x \in \partial\mathbb{Q}$.
Sei $x \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ offen, $x \in A$. Es gibt ein ϵ mit der Eigenschaft, dass $U_\epsilon(x) \subset A$.
Nun gibt es $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $|y - x| < \epsilon$ und $|q - x| < \epsilon$.
D.h.: $A \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \phi$ und $A \cap \mathbb{R} \neq \phi$, also nach Def.: $x \in \partial\mathbb{Q}$

Nun ist der letzte Schritt trivial: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, da alle Punkte von $\mathbb{R}$ bereits im Rand von $\mathbb{Q}$ liegen. Somit gibt die Vereinigung auf triviale Weise ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 *Endlich-dimensionale, normierte Vektorräume* $(***)$

Zeigen Sie: Jeder endlich-dimensionale, normierte Vektorraum $(V, \|\ \|)$ ist ein Banachraum.

Hinweis: Verwenden Sie die Äquivalenz von Normen sowie den Satz von Bolzano-Weierstraß. Letzterer lautet: Im euklidischen $\mathbb{R}^n$ gilt: 1. Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. 2. Jede Cauchyfolge konvergiert.

Lösung:

Man überträgt die Norm von V auf den $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe eines geeigneten Isomorphismus $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$: Für ein $x \in \mathbb{R}^n$ setzen wir die Norm so fest: $\|x\|_\varphi := \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|$.
Jede Cauchyfolge in $(V, \|\ \|)$ wird somit auf eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\varphi)$ abgebildet. Nach dem Satz von Bolzano-Weißerstraß und mit der Äquivalenz von $\|\ \|_\varphi$ und $\|\ \|_2$ konvergieren die Cauchyfolgen in $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\varphi)$, damit auch die Cauchyfolgen in $(V, \|\ \|)$.

Aufgabe 5 *Abschluss und Rand* $(*)$

Zeigen Sie: Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subset M$. Dann sind der Rand ∂A und der Abschluss $\overline{A}$ abgeschlossen in M.

Lösung:

Wir zeigen zunächst, dass der Abschluss $\overline{A}$ abgeschlossen ist, dann ist der zweite Teil leicht.

Nach Definition ist der Abschluss $\overline{A} = A \cup \partial A$. Daher wissen wir, dass für alle Punkte $x \in \overline{A}$ gelten muss: $U_\epsilon(x) \cap A \neq \phi$. So einen Punkt nennt man Berührpunkt.
Wir nehmen nun einen Punkt aus dem Komplement von $\overline{A}$, der folgedessen kein Berührpunkt sein kann: $y \in M\backslash\overline{A} = (\overline{A})^c$.
Dann $\exists$ Umgebung $U(y)$ mit $U \cap A = \phi$, also $U \subset (M\backslash\overline{A})$. Damit ist $M\backslash\overline{A}$ offen und somit $\overline{A}$ abgeschlossen.

Jetzt folgt leicht: $\partial A = \overline{A}\backslash A^0 = \overbrace{\overline{A}}^{\text{abgeschl.}} \cap \underbrace{(\overbrace{A^0}^{\text{offen}})^c}_{\text{abgeschl.}} \Longrightarrow$ abgeschlossen

Aufgabe 6 *Kompaktum unter stetiger Abbildung* $(**)$

Zeigen Sie: Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ bildet das Kompaktum $A \subset X$ auf ein Kompaktum (f(A)) ab.

Tipp: Es kann helfen, sich zuerst zu überlegen, was das Kompaktum als solches auszeichnet gegenüber einer beliebigen anderen Menge.

Lösung:

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Da A kompakt, gibt es eine in A konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen $x \in A$ konvergiert.
Nun übertragen wir diese Folge mittels f in das Bild $f(A)$: Es ist dann $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(A)$ und $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge davon. Für diese gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{\text{f stetig}}{=} f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x) \in f(A)$$

Somit hat $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $f(A)$ konvergente Teilfolge, also folgt die Behauptung, dass $f(A)$ kompakt.

Aufgabe 7 *Zusammenhang* $(***)$

Zeigen Sie, dass das in der Vorlesung gegebene Beispiel $X = Graph(f(x)) \cup (0, y)$ mit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$ und $-1 < y < 1$ tatsächlich zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass jedes Intervall in $\mathbb{R}$ sowohl zusammenhängend als auch wegzusammenhängend ist. Außerdem ist das Bild einer (weg)zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung (weg)zusammenhängend.

Lösung:

Zunächst stellen wir fest, dass wir die Menge als Vereinigung zweier nach Definition offener Mengen gegeben haben. Jede Menge ist offensichtlich für sich selbst zusammenhängend. Bleibt zu prüfen, ob die beiden Mengen disjunkt sind um eine Aussage über den Zusammenhang zu machen.

Wir wählen willkürlich einen Punkt $P = (0, y_0)$ auf der y-Achse mit $-1 < y_0 < 1$ und eine δ-Umgebung $U_\delta(P)$. Wir finden dazu: $x' = \dfrac{1}{\arcsin y_0}$ (im Falle von $y_0 = 0$ setzen wir $x' = \frac{1}{2\pi}$). Wir finden also mindestens eine Lösung $x' \in (0, \infty)$. Wir wissen aber, dass der Sinus 2π-periodisch ist. Somit erhalten wir das gleiche Ergebnis y_0, wenn wir schreiben $\sin\left(\frac{1}{x'} + 2k\pi\right)$.
Nun betrachten wir das Argument des Sinus und formen um:

$$\frac{1}{x'} + 2k\pi = \frac{1 + 2k\pi x'}{x'} = \frac{1}{\dfrac{x'}{1 + 2k\pi x'}}$$

Damit können wir uns ein definieren: $x'' = \dfrac{x'}{1 + 2k\pi x'}$. Für genügend großes k können wir uns immer ein $x'' < \delta$ basteln, also liegt in jeder ϵ-Umgebung um jeden Punkt P mindestens einen Punkt des Graphen von f. Damit sind beide Mengen nicht disjunkt, also zusammenhängend.

Nun müssen wir noch den Wegzusammenhang wiederlegen. Also nehmen wir an ohne Einschränkung an, dass es einen Weg $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) : [0, 1] \to X$ gibt, der z.B. von $(0, 0)$ nach $(\frac{1}{2\pi}, 0)$ führt. Zum Punkt $(0, 0)$ kommen wir ja leicht von jedem $(0, y)$, indem wir einfach entlang der y-Achse gehen. Daher schränkt uns das in unserer Aussage nicht ein; später können wir noch ein weiteres Argument bringen, wie wir sehen werden. Wir wählen für unseren Weg nun sinnvollerweise die Randbedingungen $w(0) = (0, 0)$ und $w(1) = (\frac{1}{2\pi}, 0)$ und erinnern uns, dass ein Weg eine stetige Abbildung ist.

Wir wählen uns nun gezielt einige x-Werte in einer Umgebung von 0. Sei $x_k = \dfrac{1}{2\pi k + \pi/2}$. Dann ist $f(x_k) = 1$. Nach dem Beweis zum Zusammenhang ist dies der Wert von x'' für $x' = 1$ und wir bekommen unsere x_k wieder kleiner als jedes δ.
Damit gilt für unseren gewählten Weg an diesen Stellen: $w(x_k) = (w_1(x_k), w_2(x_k)) = (w_1(x_k), 1) \quad (\#)$.

Für den Weg als stetige Funktion muss an der Stelle $(0,0)$ das ϵ-δ-Kriterium gelten, also:
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [0,1]$ mit $d(0,x) < \delta : d(w(0), w(x)) < \epsilon$

Es gibt aber nach (#) in jeder δ-Umgebung um (0,0) Funktionswerte fast aller x_k, für die $\epsilon \geq 1$ sein muss. Somit ist der w kein Weg, das nicht stetig, also unsere Mengen nicht wegzusammenhängend.
Hier sehen wir auch das oben angesprochene Argument: Wenn wir ein beliebigen Punkt $(0, y_0)$ gewählt hätten, finden wir immer derartige x_k, indem wir einfach bei unserem x'' die 1 durch eine passenden Wert ersetzen, der einen passenden Versatz der Funktionswerte liefert.

Aufgabe 8 *Mannigfaltigkeiten*

Bestimmen Sie, ob die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ darstellen.

a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0 = yz\}$

Lösung:

Wir finden schreiben die Jacobi-Matrix auf:

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

Hier braucht man nicht allzu scharf hinsehen, um Fälle zu finden, wo die Matrix nicht vollen Rang hat. Leicht wäre zum Beispiel $y = 0$. Nun sind die Zeilen linear abhängig, die Matrix hat *Rang* $J_f = 1$, die Punkte sind im Definitionsbereich von f. Somit ist M keine Untermannigfaltigkeit.

b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2y^2 - (z-1)^3 - 2 = 0\}$

Lösung:

Hier reicht es aus, den Gradienten zu betrachten:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y^2x \\ 2x^2y \\ -3(z-1)^2 \end{pmatrix}$$

Der Gradient verschwindet, wenn $z = 1$ und entweder $x = 0$ oder $y = 0$. Mit dem Wert für z folgt jedoch aus f, dass $x^2y^2 = 2$ und dies hierfür sind weder $x = 0$ noch $y = 0$ erlaubt, also liegen die Punkte nicht in M. Somit hat die Matrix immer vollen Rang für alle Werte aus M, welches deswegen eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

c) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - (z-1)^2 - 2 = 0 = x^2 + y^2 + z^3 - 3\}$

Lösung:

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2(z-1) \\ 2x & 2y & 3z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2(z-1) \\ 0 & 0 & 3z^2 + 2(z-1) \end{pmatrix}$$

Hier findet man für $3z^2 + 2(z-1) = 0$ die Lösungen $z = \frac{1}{3}(-1 \pm \sqrt{7})$. Diese sind aber keine Lösung für die Bedingungen.
Dies sieht man leicht, indem man die beiden Bedinungen gleichsetzt und dann sieht, dass nur Terme von z und Konstanten bleiben: $z^3 - 3 = -(z-1)^2 - 2$. Die Lösungen z_0 dieser Gleichung kann man leicht raten (oder man rät eine und macht Polynomdivision): $z_0 \in \{-2, 0, 1\}$.

Also hat J_f wieder maximalen Rang, deswegen ist M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Aufgabe 9 *Tangentialraum*

Finden Sie für $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - (z-1)^2 - 2 = 0 = x^2 + y^2 + z^3 - 3\}$ den Tangentialraum an den Punkten $P = (0, 0, 0)$ und $Q = (\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 0)$, d.h. es genügt, wenn Sie die Basisvektoren des Tangentialraums bestimmen.

Lösung:

Wir stellen zunächst fest, dass P überhaupt gar nicht auf der gegebenen Untermannigfaltigkeit liegt, daher können wir für P auch keinen Tangentialraum angeben.

Hingegen ist Q tatsächlich eine Lösung für beide Bedingungen. Nun müssen wir folgendes lösen:

$$T_Q M = \ker(f'(Q)) = \left\{ \vec{\Delta} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle J_f(Q), \vec{\Delta} \right\rangle = 0 \right\}$$

Wir erinnern uns daran, dass wir die gleiche Untermannigfaltigkeit schon bei der vorigen Aufgabe betrachtet haben, daher schreiben wir $J_f(Q)$ einfach hin:

$$\left\langle J_f(Q), \vec{\Delta} \right\rangle = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2(z-1) \\ 0 & 0 & 3z^2 + 2(z-1) \end{pmatrix} \Bigg|_Q \cdot \vec{\Delta} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3/2} & 2\sqrt{3/2} & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das kann leicht durch einen Vektor der Form $\vec{v}_\lambda = \lambda(-1, 1, 0)^T$, $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ gelöst werden, es gibt keine weiteren Lösungen.
Somit ist z.B. $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0)^T$ ein Basisvektor des Tangentialraums.