ANDREAS WÖRFEL


**Aufgabe 1** *Äquivalente Aussagen für Stetigkeit*(∗∗)

Beweisen Sie folgenden Satz: Seien $X$ und $Y$ metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (I) $f$ stetig
- (II) $f^{-1}(V)$ offen für jedes $V \subset Y$ offen
- (III) $f^{-1}(A)$ abgeschlossen für jedes $A \subset Y$ abgeschlossen

Gehen Sie praktischerweise folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie zuerst (I) $\Rightarrow$ (II). Bedenken Sie hierbei, dass eine stetige Abbildung Punkte in einer Umgebung um ein $x_0$ im Bild in eine Umgebung des Bildpunktes $f(x_0)$ abbildet. (Letztere Aussage brauchen Sie nicht zu zeigen, diese können Sie als gegeben annehmen.)

b) Zeigen Sie (II) $\Rightarrow$ (I) mit Hilfe des $\epsilon$-$\delta$-Kriteriums:
$f$ stetig $\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X$ mit $d(x_0, x) < \delta : d(f(x_0), f(x)) < \epsilon$

c) Zeigen Sie (II) $\Rightarrow$ (III). Hier ist es geschickt, $Y \backslash A$ zu betrachten. Haben Sie dies bewiesen, so folgt (III) $\Rightarrow$ (II) analog dazu. Dies brauchen Sie dann nicht mehr zu zeigen.

**Aufgabe 2** *Hausdorff-Eigenschaft* (∗)

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum $(M; d)$ gilt: je zwei verschiedene Punkte haben disjunkte Umgebungen, d.h. $\forall x, y \in M, x \neq y \exists$ Umgebung $U$ von $x$, Umgebung $V$ von $y$ mit: $U \cap V = \phi$.

**Aufgabe 3** $\mathbb{Q}$ *liegt dicht in* $\mathbb{R}$ (∗∗)

Zeigen Sie, dass der Abschluss von $\mathbb{Q}$ ganz $\mathbb{R}$ ist. Sie tun sich sehr leicht, das zu zeigen, wenn Sie zunächst beweisen, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Letzteres können Sie tun, indem Sie zeigen: $x \in \mathbb{R} \iff x \in \partial\mathbb{Q}$

**Hinweis:** Es genügt „$\Longrightarrow$“ der letztgenannten Äquivalenz zu zeigen, die Rückrichtung wird nicht benötigt. Dann ist der Rest des Beweises trivial.

**Aufgabe 4** *Endlich-dimensionale, normierte Vektorräume* (∗ ∗ ∗)

Zeigen Sie: Jeder endlich-dimensionale, normierte Vektorraum $(V, \| \ \|)$ ist ein Banachraum.

**Hinweis:** Verwenden Sie die Äquivalenz von Normen sowie den Satz von Bolzano-Weierstraß. Letzterer lautet: Im euklidischen $\mathbb{R}^n$ gilt: 1. Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. 2. Jede Cauchyfolge konvergiert.

**Aufgabe 5** *Abschluss und Rand* (∗)

Zeigen Sie: Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subset M$. Dann sind der Rand $\partial A$ und der Abschluss $\overline{A}$ abgeschlossen in $M$.

**Aufgabe 6** *Kompaktum unter stetiger Abbildung* $(**)$

Zeigen Sie: Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ bildet das Kompaktum $A \subset X$ auf ein Kompaktum (f(A)) ab.

**Tipp:** Es kann helfen, sich zuerst zu überlegen, was das Kompaktum als solches auszeichnet gegenüber einer beliebigen anderen Menge.

**Aufgabe 7** *Zusammenhang* $(***)$

Zeigen Sie, dass das in der Vorlesung gegebene Beispiel $X = Graph(f(x)) \cup (0, y)$ mit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$ und $-1 < y < 1$ tatsächlich zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

**Hinweis:** Sie dürfen verwenden, dass jedes Intervall in $\mathbb{R}$ sowohl zusammenhängend als auch wegzusammenhängend ist. Außerdem ist das Bild einer (weg)zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung (weg)zusammenhängend.

**Aufgabe 8** *Mannigfaltigkeiten*

Bestimmen Sie, ob die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ darstellen.

a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0 = yz\}$

b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2y^2 - (z - 1)^3 - 2 = 0\}$

c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - (z - 1)^2 - 2 = 0 = x^2 + y^2 + z^3 - 3\}$

**Aufgabe 9** *Tangentialraum*

Finden Sie für $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - (z - 1)^2 - 2 = 0 = x^2 + y^2 + z^3 - 3\}$ den Tangentialraum an den Punkten $P = (0, 0, 0)$ und $Q = (\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 0)$, d.h. es genügt, wenn Sie die Basisvektoren des Tangentialraums bestimmen.