

Umkehrbarkeit und Implizite Funktionen

Aufgabe 1 Existenz der Inversen

Sind folgende Abbildungen bijektiv (auf geeigneten Definitionsmengen, diese bitte auch angeben)? Benutze den Satz über Umkehrfunktionen und begründe damit deine Antwort durch Rechnung.

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(\rho, \phi, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$
- c) $\Psi(r, \theta, \varphi) = ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)$

Lösung:

Um festzustellen, ob eine Funktion bijektiv ist, muss man nur berechnen, ob $Df(x)$ invertierbar ist (Satz über Umkehrfunktionen):

- a) $Df(x) = 2x \Rightarrow$ invertierbar für $x \neq 0$, also kann man x^2 nur entweder auf der positiven oder der negativen Halbebene zu \sqrt{x} umkehren, was uns nicht weiter wundert.

$$b) Df(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det Df(\rho, \phi, z) = \rho(\cos \phi)^2 + \rho(\sin \phi)^2 = \rho$$

Also ist diese Matrix invertierbar für $\rho > 0$, also auf der Definitionsmenge der Zylinderkoordinaten. Da es sich hier um eine Koordinatentransformation handelt, ist das vollkommen vernünftig.

$$c) D\Psi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi (R + r \cos \theta) \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi (R + r \cos \theta) \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det D\Psi(r, \theta, \varphi) = -(rR + r^2 \cos \theta)$$

Auch diese Matrix ist invertierbar auf der Definitionsmenge der Toruskoordinaten $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$

Aufgabe 2 Implizite Funktionen

a) $f(x, y, z) = x - y^7 + z^3 - x^2z - 1 = 0$

Lässt sich diese Funktion in der Umgebung des Punktes $P = (1, 0, 1)$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $z = g(x, y)$ darstellen? Bestimme außerdem $\partial_x g(1, 0)$!

b) $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2(x^2 + 1) - 2yx^2 - 2y = 0$

Bestimme den Bereich $U \subset \mathbb{R}^2$, in dem sich die implizite Funktion f nach $y = g(x)$ auflösen lässt!

c) $f(x, y) = 2xy + \cos x^2 + \sin y^2 - 4x - 1 + y$

- Zeige, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nach y auflösbar ist
- Berechne $y'(0)$ und $y''(0)$
- Bestimmen für die Funktion $y(x)$ das Taylor-Polynom vom Grad zwei um den Nullpunkt

Lösung:

a) • $P \in \{(x, y, z); f(x, y, z) = 0\}$, da $f(1, 0, 1) = 1 - 0^7 + 1^3 - 1^2 \cdot 1 - 1 = 0$

- $\partial_x f(x, y, z) = 1 - 2xz$
- $\partial_y f(x, y, z) = -7y^6$
- $\partial_z f(x, y, z) = 3z^2 - x^2$
- $\Rightarrow f$ ist stetig differenzierbar

- $\partial_z f(1, 0, 1) = 3 \cdot 1^2 - 1^2 = 2 \neq 0$

Die implizite Funktion $f(x,y,z)=0$ erfüllt die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen. Also lässt sich $f(x,y,z)=0$ in einer Umgebung von P als $f(x,y,g(x,y))=0$ darstellen.

$$\partial_x g(1, 0) = -\frac{\partial_x f(1, 0, 1)}{\partial_z f(1, 0, 1)} = -\frac{1 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

b) Die Funktion ist unendlich oft stetig differenzierbar (Polynom). Damit die Funktion in x nach $y=g(x)$ auflösbar ist, muss gilt für alle Werte (x, y) mit $(x, y) \in \{(x, y); f(x, y) = 0\}$ gelten:

$$\partial_y f(x, y) \neq 0$$

Also hier:

$$\partial_y f(x, y) = yx^2 + y - 2x^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(y - 2) + (y - 2) = (y - 2) \cdot (x^2 + 1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Also ist die Funktion für alle $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2 \wedge f(x, y) = 0\}$ nach y auflösbar.

c) • $f(0, 0) = 0 + \cos 0 + \sin 0 - 0 - 1 + 0 = 0$

$$\partial_x f(x, y) = 2y - 2x \sin x^2 - 4$$

$$\partial_y f(x, y) = 2x + 2y \cos y^2 + 1$$

$\Rightarrow f$ ist zweimal stetig differenzierbar

$$\partial_y f(0, 0) = 1 \neq 0$$

Die implizite Funktion $f(x,y)=0$ erfüllt die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen. Also lässt sich $f(x,y)=0$ in einer Umgebung von $(0,0)$ nach y auflösen.

•

$$y'(0) = -\frac{\partial_x f(0, 0)}{\partial_y f(0, 0)} = -\frac{-4}{1} = 4$$

$$\partial_x^2 f(x, y) = 4x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2$$

$$\partial_y^2 f(x, y) = 2 \cos y^2 - 4y^2 \sin y^2$$

$$\partial_{xy}^2 f(x, y) = 2$$

$$y''(0) = -\frac{(\partial_y f(0, 0))^2 \partial_x^2 f(0, 0) - 2\partial_y f(0, 0)\partial_{xy}^2 f(0, 0)\partial_x f(0, 0) + \partial_y^2 f(0, 0) \cdot (\partial_x f(0, 0))^2}{(\partial_y f(0, 0))^3} = 48$$

• Taylor-Polynom vom Grad 2:

$$T(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 = 4x + 24x^2$$

Aufgabe 3 Zweite Ableitung einer Auflösung

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = 0$ eine implizite Funktion. Die erste Ableitung der Auflösung einer solchen Funktion nach y ist nach dem Satz aus der VL gegeben durch:

$$g'(x) = -\frac{(\partial_x f)(x, g(x))}{(\partial_y f)(x, g(x))}$$

Berechne nun allgemein die zweite Ableitung $g''(x)$, um die Formel aus der Vorlesung zu beweisen:

$$g''(x) = -\frac{(\partial_y f)^2 \partial_x^2 f - 2\partial_y f \partial_{xy}^2 f \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot (\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^3} \Big|_{(x, g(x))}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \frac{d}{dx}g'(x) = -\frac{\partial_y f \cdot (\partial_x^2 f + \partial_y \partial_x f \cdot \partial_x g) - \partial_x f \cdot (\partial_y \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot \partial_x g)}{(\partial_y f)^2} \Big|_{(x,g(x))} \quad \partial_x g(x) \stackrel{=}{=} g'(x) \\
 &= -\frac{\partial_y f \cdot \left(\partial_x^2 f + \partial_y \partial_x f \cdot \left(-\frac{\partial_x f}{\partial_y f} \right) \right) - \partial_x f \cdot \left(\partial_y \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot \left(-\frac{\partial_x f}{\partial_y f} \right) \right)}{(\partial_y f)^2} \Big|_{(x,g(x))} = \\
 &= -\frac{(\partial_y f)^2 \partial_x^2 f - 2\partial_y f \partial_{xy}^2 f \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot (\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^3} \Big|_{(x,g(x))}
 \end{aligned}$$

Wobei man besonders beachten muss, dass

$$\partial_x(\partial_x f(x, g(x))) = \partial_x^2 f(x, g(x)) + \partial_y \partial_x f(x, g(x)) \partial_x g(x)$$

da die Funktion f nicht nur explizit, sondern auch implizit über g von x abhängt! $\partial_x = g'(x)$ ist durch die Aufgabenstellung bereits gegeben und muss nur eingesetzt werden. Nach der 2. Zeile wurde mit $\partial_y f$ erweitert.

Aufgabe 4 Zwei implizite Funktionen

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$f_1(t, x, y) = 0 \quad f_2(t, x, y) = 0$$

mit $f_1(t, x, y) = e^{y^2 \sin x} + x^6 y^2 - 3yt - 1$ und $f_2 = x^2 + y^2 t - 1$.

Der Punkt $P = (1, 0, -1)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems. Dieses soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden? Ist diese Matrix invertierbar?

$M =$

Lösung:

$$\partial_x f_1(t, x, y) = e^{y^2 \sin x} \cdot y^2 \cos x + 6x^5 y^2$$

$$\partial_y f_1(t, x, y) = e^{y^2 \sin x} \cdot 2y \sin x + 2x^6 y - 3t$$

$$\partial_x f_2(t, x, y) = 2x$$

$$\partial_y f_2(t, x, y) = 2yt$$

Die interessierende Matrix ist laut Satz über implizite Funktionen die Ableitungsmatrix nach den Variablen, nach denen aufgelöst wird am Punkt P:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\
 \det M &= -2 \neq 0
 \end{aligned}$$

Also ist M invertierbar.

Übungsaufgaben zur Vektoranalysis

Aufgabe 5 Einfache Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-y, x) \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y)$$

- Veranschauliche die beiden Vektorfelder mittels einer Skizze.
- Bestimme von f und g jeweils die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation.
- Die geschlossene Kurve sei gegeben durch die Parametrisierung $C : [0, 2\pi] \rightarrow K : t \mapsto (\cos t, \sin t)$
Berechne nun noch die Zirkulation der beiden Vektorfelder!
Hinweis: Die Zirkulation ist Das Kurvenintegral von f entlang des Weges K !

Lösung:

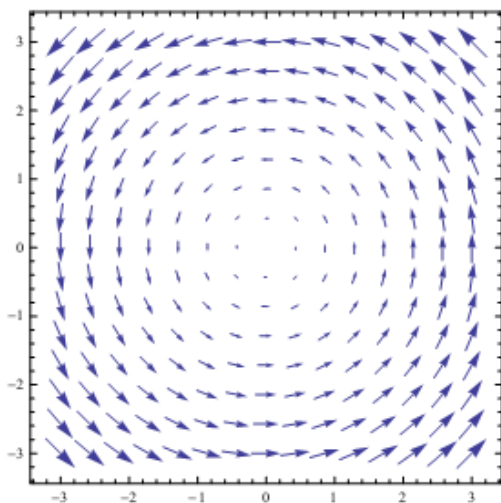


Abbildung 1: Vektorfeld $f(x,y)$

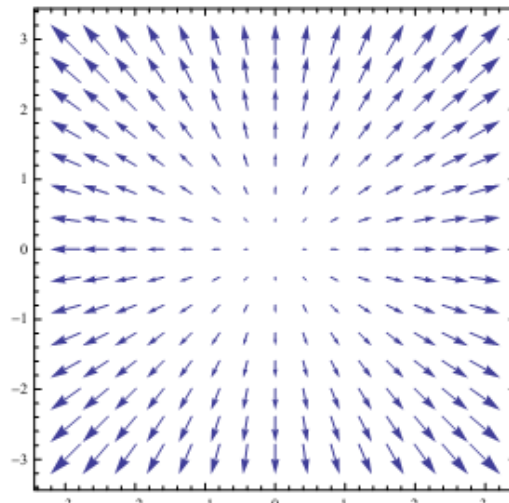


Abbildung 2: Vektorfeld $g(x,y)$

-
-

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot f(x, y) = -\partial_x y + \partial_y x = 0 \quad \nabla \cdot g(x, y) = \partial_x x + \partial_y y = 2$$

$$\text{rot } f(x, y) = \text{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \partial_x x + \partial_y y = 1 + 1 = 2 \quad \text{rot } g(x, y) = \text{rot} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \partial_x y - \partial_y x = 0$$

- Kurvenintegrale entlang C :

$$\int_C f ds = \int_1^2 f(C(t)) \dot{C}(t) dt = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$$

$$\int_C g ds = \int_1^2 g(C(t)) \dot{C}(t) dt = \int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + \sin t \cos t) dt = 0$$

Aufgabe 6 Kurze Beweise

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig diffbar.
Zeige (möglichst immer mithilfe des Epsilon-Tensors), dass

- (i) Zeige: $\text{rot grad } f = 0$
- (ii) Zeige: $\text{div rot } v = 0$
- (iii) Beweise mithilfe des Epsilon-Tensors: $\nabla \times (v_1 + v_2) = \nabla \times v_1 + \nabla \times v_2$
- (iv) Beweise mithilfe des Epsilon-Tensors: $\nabla \times \nabla \times v = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v$ (schwieriger)
- (v) Gib ein Beispiel, wo für v nicht gilt: $\text{grad div } v = 0$

Lösung:

a) $[\nabla \times (\nabla f)]_j = \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} \partial_k \partial_l f \stackrel{\text{Satz von Schwarz}}{=} - \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jlk} \partial_l \partial_k f = - [\nabla \times (\nabla f)]_j$

b)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times v) &= \nabla \cdot \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} \partial_k v_l = \sum_{j=1}^3 \partial_j \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} \partial_k v_l = \\ &= \sum_{jkl} \epsilon_{jkl} \partial_j \partial_k v_l \stackrel{\text{Satz von Schwarz}}{=} - \sum_{jkl} \epsilon_{kjl} \partial_k \partial_j v_l = -\nabla \cdot \nabla \times v \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} [\nabla \times (v_1 + v_2)]_j &= \sum_{kl} \epsilon_{jkl} \partial_k (v_1 + v_2)_l = \sum_{kl} \epsilon_{jkl} \partial_k (v_{1,l} + v_{2,l}) = \\ &= \sum_{kl} \epsilon_{jkl} \partial_k v_{1,l} + \sum_{kl} \epsilon_{jkl} \partial_k v_{2,l} = [\nabla \times v_1 + \nabla \times v_2]_j \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} [\nabla \times \nabla \times v]_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times v)_k = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \sum_{lm} \epsilon_{klm} \partial_l v_m = \sum_{jlm} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \right) \partial_j \partial_l v_m = \\ &= \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l v_m = \sum_j \partial_j \partial_i v_j - \sum_j \partial_j \partial_j v_i = \partial_i \sum_j \partial_j v_j - \left(\sum_j \partial_j \partial_j \right) v_i = \\ &= \partial_i (\nabla \cdot v) - \Delta v_i = [\nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v]_i \end{aligned}$$

e) Wähle z.B. $v(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2, y^2, z^2)$.

$$\Rightarrow \nabla \left(\nabla \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} \right) = \nabla(x + y + z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 *Sonne, Mond und Sterne*

- a) Erkläre, warum eine Kugel und ein Kreis sternförmig sind!
- b) Zeichne einen Seestern, der nicht sternförmig ist!
- c) das Gravitationsfeld der Erde für alle Raumpunkte konservativ?

Lösung:

- a) Ganz anschaulich heißt sternförmig, dass man innerhalb einer Menge **einen** (oder mehrere) Punkt(e) finden kann, sodass man von diesem aus alle andere Punkte durch Geraden erreichen kann, die vollständig innerhalb der Menge liegen.
Für eine Kugel oder einen Kreis wählt man am besten den Mittelpunkt. Von dort aus kann man durch Variation der Länge des Radius und des Winkels zu einer beliebigen Symmetrieachse ganz anschaulich jeden anderen Punkt innerhalb des Körpers erreichen, ohne ihn verlassen zu müssen.



Abbildung 3: Einfach wegzusammenhängender Seestern

- b) Dieser Seestern ist leider nicht sternförmig, sondern nur einfach wegzusammenhängend, da man wegen den abgeknickten Armen z.B. vom Mittelpunkt aus nicht jede Armspitze erreichen kann und auch keinen anderen verwendbaren Punkt finden kann. (Asymmetrie!!)
- c) Das Gravitationsfeld der Erde wird natürlich nur für $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definiert, da sich bei 0 eine Singularität befindet - dort ist das Feld natürlich nicht mehr konservativ.

Aufgabe 8 Aus der Theoretischen Physik

aus der Mechanik-Klausur SS08 von Prof. Weise

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- a) Nenne drei äquivalente Bedingungen dafür, dass ein Kraftfeld konservativ ist!
- b) Berechne $\nabla \times \vec{F}(\vec{r})$ für $v \neq 0$
- c) Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral entlang eines Kreises in der x-y-Ebene mit dem Radius $r_0 > 0$ und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.
Wie hängt das Ergebnis von r_0 ab? *Hinweis: Parametrisieren Sie den Integrationsweg mittels ebener Polarkoordinaten.*
- d) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus b) und c): Ist das Kraftfeld konservativ? Gibt es einen Widerspruch zwischen den Ergebnissen aus Teilaufgaben b) und c)?

Lösung:

- (i) • $\nabla \times F(r) = \text{rot } F(r) = 0 \quad \forall r$
• $\oint_C F(r) \cdot dr = 0 \quad \forall C$
• $\exists U$ für das gilt: $F(r) = -\nabla U(r)$

(ii) $F(r) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\partial_y \left(-\frac{y}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^2} \left(1 - 2\frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$\partial_x \left(\frac{x}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2} \left(1 - 2\frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$\nabla \times f(r) = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r^2} \left(1 - 2\frac{x^2}{r^2} + 1 - 2\frac{y^2}{r^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{x^2+y^2}{r^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } r \neq 0$$

- (iii) Wegintegral entlang eines Kreises

$$\Rightarrow \text{Parametrisierung mit ebenen Polarkoordinaten: } r(\varphi) = r_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r_0 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r_0 e_\varphi$$

$$F(r(\varphi)) = \frac{1}{r_0^2} \begin{pmatrix} -r_0 \sin \varphi \\ r_0 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0} e_\varphi$$

$$\oint_C F(r) \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(\varphi)) \cdot \frac{dr}{d\varphi} d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0} e_\varphi \cdot e_\varphi r_0 d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

\Rightarrow Ergebnis unabhängig von r_0

- (iv) Das Kraftfeld ist nicht konservativ, weil $\oint_C F(r) \cdot dr \neq 0$. Das ist aber kein Widerspruch zum Ergebnis aus Teilaufgabe b), weil das Kraftfeld nur konservativ ist, wenn $\nabla \times F(r) = \text{rot } F(r) = 0$ für alle r . Für $r = 0$ muss deshalb $\text{rot } F(r) \neq 0$ gelten.