CARLA ZENSEN
AUFGABEN DIENSTAG

Umkehrbarkeit und Implizite Funktionen

Aufgabe 1 *Existenz der Inversen*

Sind folgende Abbildungen bijektiv (auf geeigneten Definitionsmengen, diese bitte auch angeben)? Benutze den Satz über Umkehrfunktionen und begründe damit deine Antwort durch Rechnung.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(\rho, \phi, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$

c) $\Psi(r, \theta, \varphi) = ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)$

Aufgabe 2 *Implizite Funktionen*

a) $f(x, y, z) = x - y^7 + z^3 - x^2 z - 1 = 0$
Lässt sich diese Funktion in der Umgebung des Punktes $P = (1, 0, 1)$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $z = g(x, y)$ darstellen? Bestimme außerdem $\partial_x g(1, 0)$!

b) $f(x, y) = \frac{1}{2} y^2 (x^2 + 1) - 2yx^2 - 2y = 0$
Bestimme den Bereich $U \subset \mathbb{R}^2$, in dem sich die implizite Funktion f nach $y = g(x)$ auflösen lässt!

c) $f(x, y) = 2xy + \cos x^2 + \sin y^2 - 4x - 1 + y$

- Zeige, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nach y auflösbar ist
- Berechne $y'(0)$ und $y''(0)$
- Bestimmen für die Funktion $y(x)$ das Taylor-Polynom vom Grad zwei um den Nullpunkt

Aufgabe 3 *Zweite Ableitung einer Auflösung*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = 0$ eine implizite Funktion. Die erste Ableitung der Auflösung einer solchen Funktion nach y ist nach dem Satz aus der VL gegeben durch:

$$g'(x) = -\frac{(\partial_x f)(x, g(x))}{(\partial_y f)(x, g(x))}$$

Berechne nun allgemein die zweite Ableitung $g''(x)$, um die Formel aus der Vorlesung zu beweisen:

$$g''(x) = -\frac{(\partial_y f)^2 \partial_x^2 f - 2\partial_y f \partial_{xy}^2 f \partial_x f + \partial_y^2 f \cdot (\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^3}\Bigg|_{(x, g(x))}$$

Aufgabe 4 *Zwei implizite Funktionen*

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$f_1(t, x, y) = 0 \qquad f_2(t, x, y) = 0$$

mit $f_1(t, x, y) = e^{y^2 \sin x} + x^6 y^2 - 3yt - 1$ und $f_2 = x^2 + y^2 t - 1$.
Der Punkt $P = (1, 0, -1)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems. Dieses soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden? Ist diese Matrix invertierbar?

$\boxed{\text{M=} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Übungsaufgaben zur Vektoranalysis

Aufgabe 5 *Einfache Vektorfelder*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-y,x) \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (x,y)$$

a) Veranschauliche die beiden Vektorfelder mittels einer Skizze.

b) Bestimme von f und g jeweils die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation.

c) Die geschlossene Kurve sei gegeben durch die Parametrisierung $C : [0, 2\pi] \to K : t \mapsto (\cos t, \sin t)$
Berechne nun noch die Zirkulation der beiden Vektorfelder!
Hinweis: Die Zirkulation ist Das Kurvenintegral von f entlang des Weges K!

Aufgabe 6 *Kurze Beweise*

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig diffbar.
Zeige (möglichst immer mithilfe des Epsilon-Tensors), dass

(i) Zeige: rot grad f=0

(ii) Zeige: div rot v=0

(iii) Beweise mithilfe des Epsilon-Tensors: $\nabla \times (v_1 + v_2) = \nabla \times v_1 + \nabla \times v_2$

(iv) Beweise mithilfe des Epsilon-Tensors: $\nabla \times \nabla \times v = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v$ (schwieriger)

(v) Gib ein Beispiel, wo für v nicht gilt: grad div v=0

Aufgabe 7 *Sonne, Mond und Sterne*

a) Erkläre, warum eine Kugel und ein Kreis sternförmig sind!

b) Zeichne einen Seestern, der nicht sternförmig ist!

c) Ist das Gravitationsfeld der Erde für alle Raumpunkte konservativ?

Aufgabe 8 *Aus der Theoretischen Physik*

aus der Mechanik-Klausur SS08 von Prof. Weise

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a) Nenne drei äquivalente Bedingungen dafür, dass ein Kraftfeld konservativ ist!

b) Berechne $\nabla \times \vec{F}(\vec{r})$ für $\vec{r} \neq 0$

c) Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral entlang eines Kreises in der x-y-Ebene mit dem Radius $r_0 > 0$ und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.
Wie hängt das Ergebnis von r_0 ab? *Hinweis: Parametrisieren Sie den Integrationsweg mittels ebener Polarkoordinaten.*

d) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus b) und c): Ist das Kraftfeld konservativ? Gibt es einen Widerspruch zwischen den Ergebnissen aus Teilaufgaben b) und c)?