Auf Wunsch gibt es hier nochmal die wichtigsten Regeln und Verfahren beim Umgang mit Matrizen.

1 Rechnen mit allg. $m \times n$-Matrizen

Eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist ein Gebilde aus m Zeilen und n Spalten, i Zeilenindex, j Spaltenindex. Es gilt:

Gleichheit:	$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$
Skalare Multiplikation:	$c \cdot A = c \cdot (a_{ij}) = (c \cdot a_{ij}) \qquad c \in \mathbb{R}$
Addition:	$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
Transposition:	$A^T = (a_{ji}) \quad (A+B)^T = A^T + B^T \quad (A^T)^T = A$
Nullmatrix:	$O = (a_{ji} = 0) \Longrightarrow A + O = O + A = A$
Rang:	$Rang\ A = Rang\ A^T =$ Zahl linear unabhängiger Zeilen / Spalten

Elementare Zeilenumformungen (analog: Spaltenumformungen):

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Man sollte sich angewöhnen, entweder nur Spalten- oder nur Zeilenumformungen zu machen, beide zu mischen kann gefährlich sein, da einige Operationen in Kombination die gesamte Matrix ausräumen können und daher „verboten“ bzw. nicht sinnvoll sind.
In der Regel sollte man sich einheitlich an Zeilenumformungen halten, da diese für das Lösen von Gleichungssystemen benutzt werden und man dann nicht in die Gefahr gerät, „Äpfel und Birnen zu addieren“.
Der Rang einer Matrix ist die Zahl der am Schluss des sog. Gauß-(Jordan)-Verfahrens von 0 verschiedenen Zeilen.

2 Gauß-Jordan-Verfahren

Das Gauß-Verfahren bzw. Gauß-Jordan-Verfahren ist ein Algorithmus zum Lösen von Gleichungssystemen bzw. um Matrizen mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilen-Stufenform zu bringen. Die ersten 4 Schritte sind das Gauß-Verfahren, alle 6 das Gauß-Jordan-Verfahren:

- Setze i = 1
- Falls die i-te Zeile an der i-te Stelle 0 ist, tausche eine Zeile mit i-te Stelle ungleich 0
- Räume durch Addionen eines geeigneten Vielfachen der i-te Zeile die i-te Stelle aller Zeilen darunter aus.
- Setze i = i+1 und wiederhole die letzen zwei Schritte solange bis i = min{Zahl der Zeilen, Zahl der Spalten}
- Räume durch Addionen eines geeigneten Vielfachen der i-te Zeile die i-te Stelle aller Zeilen darüber aus.
- Setze i = i-1 und wiederhole den letzten Schritt so lange, bis i = 1

Oft (bes. für Gleichungssysteme) werden auch vor jeder Iteration die Zeilen durch den Betrag jeweils ersten von Null verschiedenen Elements geteilt, um nur 1en auf der Diagonalen zu erhalten.

3 Produkt von Matrizen

Für die folgenden Regeln benötigt man zueinander passende Matrizen: Sei z.B. $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{jk})$ eine $n \times l$-Matrix. Möchten wir das Produkt AB ausführen, muss die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmen. Wir definieren die Matrixmultiplikation so:

$$C := AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) = (c_{ik})$$

Somit ist C eine $m \times l$-Matrix. Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

Für passende Matrizen A, B, C gilt nun:

Distributivgesetz:	$A(B + C) = AB + BC$
Assoziativgesetz:	$A(BC) = (AB)C$
Transposition:	$(AB)^T = B^T A^T$

4 $n \times n$-Matrizen

Für die folgenden Eigenschaften, Begriffe und Regeln benötigt man $n \times n$-Matrizen (quadratische Matrizen).

Einheitsmatrix:	$E = \mathbb{1} = (a_{ij})$ mit $a_{ii} = 1$ $\qquad A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$
Inverses:	$AA^{-1} = \mathbb{1} \qquad (A^{-1})^{-1} = A$
Inversion des Produkts:	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Inversion der Transposition:	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Symmetrische Matrix:	$A^T = A$
Schiefsymmetrische Matrix:	$A^T = -A$
Orthogonale Matrix:	$A^{-1} = A^T$
Selbstinverse Matrix:	$A^{-1} = A$
Zerlegung einer Matrix:	$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ symm. + schiefsymm. Anteil
Spur:	$Spur\ A = tr\ A = \sum_i a_{ii}$

Invertieren einer Matrix ist allgemein auch nur bei quadratische Matrizen möglich. Dazu wendet man das Gaußverfahren parallel auf die zu invertierende Matrix und gleichzeitig und in gleicher Weise auf eine Einheitsmatrix an. Somit lässt sich die zu invertierende Matrix auf die Form einer Einheitsmatrix bringen und an ehemaligen Einheitsmatrix kann man nun die inverse Matrix direkt ablesen.

5 Determinanten

Jeder $n \times n$-Matrix ist eine Zahl, die wir ihre Determinante nennen, zugeordnet. Diese kann man auf verschiedene Weisen berechnen.

5.1 2×2-Matrix

Es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ac - bd$$

5.2 3×3-Matrix: Regel von Sarrus

Hierfür gibt es 2 äquivalente Verfahren:
1. Schreibe Spalte 1 und 2 rechts neben die Matrix. Bilde das Produkt der Elemente diagonal von links oben nach rechts unten für jede Spalte und addiere diese Werte. Bilde das Produkt der Elemente diagonal von links unten nach rechts oben für jede Spalte und subtrahiere diese Werte.

2. Schreibe Zeile 1 und 2 unter die Matrix. Bilde das Produkt der Elemente diagonal von links oben nach rechts unten für jede Zeile und addiere diese Werte. Bilde das Produkt der Elemente diagonal von links unten nach rechts oben für jede Zeile und subtrahiere diese Werte.

5.3 Für beliebige $n \times n$-Matrizen: Laplace'scher Entwicklungssatz

Sei A eine $n \times n$-Matrix und A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch Streichen der Zeile i und Spalte j hervorgeht.

$$\det A = \det\,(a_{ij}) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}_{\text{Entwicklung nach Zeile } i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}_{\text{Entwicklung nach Spalte } j}$$

Das heißt konkret:

- Man sucht sich eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen 0-Einträgen, nach der man entwickelt.
- Man multipliziert den ersten Eintrag mit $(-1)^{i+j}$ und der Determinante der verbleibenden Restmatrix.
- Dieses Verfahren macht man mit allen weiteren Einträgen der gewählten Zeile bzw. Spalte und addiert die Ergebnisse.
- Man wiederholt das obige Verfahren so lange iterativ für die Restmatrizen, bis lauter einfach lösbare Determinanten übrig bleiben und erhält schlussendlich den Wert der Determinante.

5.4 Einfache Determinanten

Es gibt zwei wesentliche Fälle, wo sich das Bilden der Determinante wesentlich Vereinfacht.

Der erste Fall ist die sogenannte Blockmatrix. Dies ist eine Matrix, die sich in Quadratische Blöcke zerlegen lässt, wobei Block B oder C die Nullmatrix O ist Es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Der zweite Fall ist die sogennante obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix. Hierbei sind alle Elemente, die entweder oberhalb (bzw. unterhalb) der Diagonalen stehen, gleich Null. Dann ist die Determinante das Produkt der Einträge der Hauptdiagonalen.

5.5 Rechenregeln für Determinanten von $n \times n$-Matrizen

Transponierte Matrix:	$\det A^T = \det A$
Inverse Matrix:	$\det A^{-1} = 1/(\det A)$
Vielfaches einer Matrix	$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$
Vertauschung zweier Zeilen in A:	$\det A' = -\det A$ wobei A' Matrix mit vert. Zeilen
Multiplikation einer Zeile in A mit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:	$\det A' = \lambda \det A'$ wobei A' Matrix mit λ-facher Zeile
Addition λ-facher einer Zeile zu anderer Zeile:	Determinante bleibt erhalten
Multiplikation zweier Matrizen:	$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

5.6 Weitere Aussagen der Determinante

Außerdem kann man aus der Determinante die folgenden äquivalenten Aussagen erhalten:

$$\begin{aligned} \det A \neq 0 &\Longleftrightarrow \text{Zeilen (Spalten) von } A \text{ linear unabhängig} \\ &\Longleftrightarrow \text{Zeilen (Spalten) bilden Basis des } \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow \text{Rang } (A) = n, \text{ also hat } A \text{ vollen Rang} \\ &\Longleftrightarrow A \text{ ist invertierbar} \\ &\Longleftrightarrow 0 \text{ ist kein Eigenwert von A} \end{aligned}$$

6 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenraum

Die Eigenwerte einer $n \times n$-Martix A werden durch das Lösen des charakteristischen Polynoms χ gefunden:

$$\chi = \det(A - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$$

Die Nullstellen des char. Polynoms sind die Eigenwerte mit entsprechender algebraischer Vielfachheit. Hat man die Eigenwerte gefunden, berechnen sich die Eigenvektoren $\vec{v}_{\lambda_1}$ zum Eigenwert λ_i wie folgt:

$$(A - \lambda_1 \mathbb{1})\vec{v}_{\lambda_1} = \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

Die Zahl der gefundenen Eigenvektoren $\vec{v}_{\lambda_1}$ zum Eigenwert λ_i nennt man geometrische Vielfachheit von λ_i. Die $\vec{v}_{\lambda_i}$ spannen den Eigenraum E_{λ_i} zu λ_i auf. Ist die algebraische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich der geometischen Vielfachheit des selben, so ist die Matrix diagonalisierbar.

Eine Matrix A kann mit Hilfe der Eigenräume diagonalisiert werden:

$$D_A := S^{-1}AS = \text{diag }(\lambda_i)$$

Hierbei ist $S = (E_{\lambda_i})$