

**Aufgabe 1** Gradient und Tangente (\*)

Bestimmen Sie zur Funktion  $f(x, y) = x^2y^3 + xy^2 + 2y$  die partiellen Ableitungen, den Gradienten bei  $(x, y)$  und  $(0, 1)$  sowie die Tangente (in vektorieller Darstellung) an  $f$  bei  $(0, 1)$

*Lösung:*

$$\begin{aligned} \begin{matrix} f_x = 2xy^3 + y^2 \\ f_y = 3x^2y^2 + 2xy + 2 \end{matrix} &\implies \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 + y^2 \\ 3x^2y^2 + 2xy + 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\nabla f(0, 1) = (1, 2) \perp T \implies \vec{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist die Tangente  $T = \vec{x}_0 + \lambda \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 2** Gradient und Tangentialebene (\*\*)

Sei  $f(x, y, z) = x \cdot e^{y \sin(xz)}$ .

Bestimmen Sie  $\nabla f(x, y, z)$ ,  $\nabla f(\pi/2, 1, 1)$  sowie die Tangentialebene  $E$  an den Punkt  $(\pi/2, 1, 1)$

**Hinweis:** Es ist hier sinnvoll, die Koordinatendarstellung der Ebene ( $E : ax + by + cz = d$ ) zu wählen anstelle der vektoriellen Darstellung. So sparen Sie sich das Suchen von Tangentialvektoren. Erinnern Sie sich an die lineare Algebra.

*Lösung:*

Wir schreiben der Einfachheit halber Vektoren als Zeilenvektoren, gemeint sind aber Spaltenvektoren.

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= (f_x, f_y, f_z) = e^{y \sin(xz)} (1 + xyz \cos(xz), x \sin(xz), x^2y \cos(xz)) \\ \nabla f(\pi/2, 1, 1) &= e(1, \pi/2, 0) \end{aligned}$$

Man weiß, dass der Gradient senkrecht auf der Niveauläche einer Funktion steht, also ist er der Normalenvektor  $\vec{n} = \nabla f(\pi/2, 1, 1)$  der gesuchten Tangentialebene. Aus der linearen Algebra sollte bekannt sein, dass in der Normalendarstellung der Ebene  $E$  gilt:  $E : \vec{n} \cdot \vec{x} = d$  mit  $\vec{x} = (x, y, z)$ . Dabei ist  $d$  der Abstand der Ebene zum Ursprung, wir finden  $d$ , wenn wir uns erinnern, dass dieser Abstand sich gerade als Skalarprodukt von Aufpunkt  $\vec{x}_0 = (\pi/2, 1, 1)$  und Normalenvektor  $\vec{n}$  berechnen lässt. Somit ergibt sich insgesamt:

$$\nabla f(\pi/2, 1, 1) \cdot \vec{x}_0 = \nabla f(\pi/2, 1, 1) \cdot \vec{x}$$

Wir führen die Skalarprodukte aus und erhalten dann:  $e\pi = e(x + y\frac{\pi}{2})$ , also  $E : x + \frac{\pi}{2}y = \pi$

Bitte erinnern sich für diese Aufgabe an die Hesse-Normalenform. Jedoch ist hier der Abstand  $d$  nicht der tatsächliche Abstand mit der euklidischen Metrik, da wir den Normalenvektor nicht normiert haben. Für die Rechnung macht es aber hier keinen Unterschied, da wir die Norm des Gradienten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens weggelassen haben.

**Aufgabe 3** „Problemkind“ partielle Ableitung (\*\*)

Man bestimme die partiellen Ableitungen von  $f$  sowie  $\nabla f(x, y)$  und  $\nabla f(1, 1)$  für die folgende Funktion:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Lösung:

Wir bestimmen zunächst allgemein die partiellen Ableitungen für  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ f_y &= \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch den Nullpunkt betrachten, dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Partielle Ableitungen am Nullpunkt:

$$f_x(0, 0) = (f(x, 0))'|_{x=0} = 0, \text{ da } f(x, 0) = 1 \text{ ist.}$$

$$f_y(0, 0) = (f(0, y))'|_{y=0} \text{ existiert nicht, da } f(0, y) = \begin{cases} -1 & \text{für } y \neq 0 \\ 1 & \text{für } y = 0 \end{cases} \text{ ist}$$

b) Richtungsableitungen am Nullpunkt:

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial(1, 0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t^{-2} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial(0, 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t(0, 1)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2 t^{-2} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2}{t} \text{ existiert nicht}$$

Dementsprechend existiert der Gradient natürlich auch nur außerhalb von  $(0, 0)$ , hier ist:

$$\nabla f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \quad , \text{ also ist } \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4** Jacobi-Matrix der Kugelkoordinaten (\*)

Die Kugelkoordinaten werden durch folgende Parametrisierung bestimmt:  $f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \cdot \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cdot \cos \vartheta \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix dieser Abbildung.

Lösung:

$$J_f = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5** Richtungsableitung und Gradient (\*)

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von  $f(x, y, z) = x^3 + e^y \sin z$  im Punkt  $(1, \ln 3, \frac{\pi}{3})$  nach dem Vektor  $\vec{v} = (3, -2, 6)$  sowie die Ableitung in Richtung  $\vec{v}$ .

Lösung:

Zuerst berechnen wir den Gradienten:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ e^y \sin z \\ e^y \cos z \end{pmatrix} \implies \nabla f(1, \ln 3, \frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Außerdem brauchen wir noch die Normierung des Vektors  $v$  für den 2. Teil der Aufgabe:  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{7} =: \vec{v}_0$

Richtungsableitung nach  $\vec{v}$  (a) und Ableitung in Richtung  $\vec{v}_0$  (b):

$$(a) \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{v}} = \nabla f(1, \ln 3, \frac{\pi}{3}) \cdot \vec{v} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{-2} \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}(12 - 2\sqrt{3}) \quad (b) \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{v}_0} = \frac{3}{14}(12 - 2\sqrt{3})$$

**Aufgabe 6** Mehrdimensionale Taylorentwicklung I (\*)

Bestimmen Sie die Taylorreihe bis zur 2. Ordnung von  $f(x, y) = \cos(xy) + xe^{y-1}$  an der Stelle  $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$

Lösung:

$$\begin{array}{ll}
 f(x, y) = \cos(xy) + xe^{y-1} & f(\pi, 1) = -1 + \pi \\
 f_x(x, y) = -y \sin(xy) + e^{y-1} & f_x(\pi, 1) = 1 \\
 f_y(x, y) = -x \sin(xy) + xe^{y-1} & f_y(\pi, 1) = \pi \\
 f_{xx}(x, y) = -y^2 \cos(xy) & f_{xx}(\pi, 1) = 1 \\
 f_{xy}(x, y) = -\sin(xy) - xy \cos(xy) + e^{y-1} & f_{xy}(\pi, 1) = 1 + \pi \\
 f_{yy}(x, y) = -x^2 \cos(xy) + xe^{y-1} & f_{yy}(\pi, 1) = \pi^2 + \pi
 \end{array} \implies$$

Damit ergibt sich die Taylorreihe zu:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &\approx -1 + \pi \\
 &+ 1(x - \pi) + \pi(y - 1) \\
 &+ \frac{1}{2} [1(x - \pi)^2 + 2(1 + \pi)(x - \pi)(y - 1) + (\pi^2 + \pi)(y - 1)^2] \\
 &= -1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi^2 - 2\pi x - (\pi + 2\pi^2)y + \frac{1}{2}x^2 + (1 + \pi)xy + \frac{1}{2}(\pi + \pi^2)y^2
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 7** Mehrdimensionale Taylorentwicklung II (\*\*)

Oft ist es viel einfacher, bekannte Potenzreihen zu verwenden, um eine Taylorreihe hinzuschreiben. Benutzen Sie diese für die folgenden Aufgaben:

- a) Taylorreihe in 3. Ordnung für  $f(x, y, z) = \cos(x) \sin(y)e^z$  an der Stelle  $(0, 0, 0)$ . Bestimmen Sie den Konvergenzradius der gesamten Reihe.

Lösung:

Wir schreiben für die bekannten Funktionen die Terme bis zur 3. Ordnung hin:

$$f(x, y, z) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots\right) \left(y - \frac{1}{6}y^3 + \dots\right) \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots\right)$$

Jetzt multiplizieren wir aus, berücksichtigen jedoch nur Terme, deren Grad nach Ausmultiplizieren 3 nicht überschreitet (lassen z.B. Terme mit  $x^2y^3z$  (Grad 6) weg):

$$f(x, y, z) \approx y + yz - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{6}y^3$$

Der Konvergenzradius ist unendlich, da die einzelnen Reihen selbst unendlichen Konvergenzradius haben.

- b) Taylorreihe in 3. Ordnung für  $f(x, y, z) = \frac{1}{1+x+y}$  an der Stelle  $(0, 0)$ . Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der gesamten Reihe.

**Hinweis:** Hier erhalten Sie durch eine einfache Umformung eine bekannte Reihe.

Lösung:

Durch scharfes Hinsehen und Überlegen erkennt man leicht, dass sich die gegebene Funktion zu einer geometrischen Reihe umbauen lässt:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x+y} &= \frac{1}{1 - (-(x+y))} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x+y)^k \\
 &= 1 - (x+y) + (x+y)^2 - (x+y)^3 \pm \dots \\
 &\approx 1 - x - y + x^2 + 2xy + y^2 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3
 \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist bestimmt durch  $|x+y| < 1$ , da nur dort die geometrische Reihe konvergiert.

**Aufgabe 8** Produktregel bei Matrixfunktionen (\*\*)

Zeigen Sie für die Funktion  $f(A) = g(A) \cdot h(A)$  die Produktregel für Matrixfunktionen:

$$f'(A)(B) = g(A) \cdot h'(A)(B) + g'(A)(B) \cdot h(A)$$

**Hinweis:** Verwenden Sie die Definition der Ableitung:  $f'(A)(B) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A+tB) - f(A)}{t}$

*Lösung:*

Wir schreiben zunächst für die Funktion  $h$  die Definition der Ableitung hin und bilden mit deren Hilfe eine lineare Näherung (siehe hierzu auch die Bemerkung unten):

$$h'(A)(B) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(A+tB) - h(A)}{t} \implies h(A+tB) = h(A) + th'(A)(B)$$

Dies können wir analog für  $g$  machen. Damit schreiben wir jetzt  $f'$  hin und verwenden obige Aussage bei (\*):

$$\begin{aligned} f'(A)(B) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A+tB) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(A+tB) \cdot h(A+tB) - g(A)h(A)}{t} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(g(A) + tg'(A)(B)) \cdot (h(A) + th'(A)(B)) - g(A)h(A)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(A) \cdot [h(A) + th'(A)(B)] + [g(A) + tg'(A)(B)] \cdot h(A) + t^2 \cdot g'(A)(B) \cdot h'(A)(B)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(A) \cdot [h(A) + th'(A)(B)]}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[g(A) + tg'(A)(B)] \cdot h(A)}{t} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} g(A) \cdot h'(A)(B) + g'(A)(B) \cdot h(A) \end{aligned}$$

**Aufgabe 9** Kettenregel bei Matrixfunktionen (\*\*)

Zeigen Sie für die Funktion  $f(A) = (g \circ h)(A)$  die Kettenregel für Matrixfunktionen:

$$f'(A)(B) = (g \circ h)'(A)(B) = g'(h(A))(h'(A)(B))$$

**Hinweis:** Verwenden Sie die Definition der Ableitung.

*Lösung:*

Wir überlegen uns - ganz genau wie bei der vorigen Aufgabe - zunächst für die Funktion  $h$  die Definition der Ableitung und nehmen wieder die lineare Näherung.

$$h'(A)(B) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(A+tB) - h(A)}{t} \implies h(A+tB) = h(A) + th'(A)(B)$$

Dies verwenden wir dann bei (\*), um die Ableitung von  $f$  umzuformen.

$$f'(A)(B) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A+tB) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(h(A+tB)) - g(h(A))}{t} \stackrel{(*)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(h(A) + th'(A)(B)) - g(h(A))}{t} \quad (**)$$

Jetzt haben wir es schon fast geschafft. Wir machen kurzfristig zwei Umbenennungen, die zwar eigentlich nicht nötig sind, aber es leichter machen, die Definition zu sehen:  $h(A) =: X$  und  $h'(A)(B) =: Y$

$$(**) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(X+tY) - g(X)}{t} \stackrel{\text{Def.}}{=} g'(X)(Y) = g'(h(A))(h'(A)(B))$$

**Bemerkung zu Aufgabe 8 / 9 :** Es ist rein von der Mathematik her nicht gleich klar, dass die lineare Näherung hier funktioniert. Formell müsste man mit  $h(A + tB) = h(A) + th'(A)(B) + o(t^2 \|B\|)$  rechnen.

Am Beweis zu 8 ändert sich dadurch nichts, da die Korrekturterme bei der Limesbildung verschwinden.

Bei Aufgabe 9 ändert sich der Beweis dann wie folgt:

$$\begin{aligned} f(A + tB) - f(A) &= g(h(A + tB)) - g(h(A)) = g(h(A) + th'(A)(B) + o(t^2 \|B\|)) - g(h(A)) \\ &= g(h(A)) + tg'(h(A))(h'(A)(B) + o(t^2 \|B\|)) + o(t^2 \|B\|) - g(h(A)) = tg'(h(A))(h'(A)(B)) + o(t^2 \|B\|) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Da dies deutlich komplizierter und wahrscheinlich viel weniger einsichtig ist, reicht der obere Beweis für unsere Übungszwecke aus, da es hier im Ferienkurs mehr um die Idee hinter und das Verstehen der Kettenregel geht als um den absolut exakten Beweis.

Dies gelingt mit dem „einfachen Beweis“ wahrscheinlich besser.

Warum funktioniert der einfache Beweis trotzdem so gut? Die Ableitung stellt nach Definition eine lineare Näherung der Funktion dar. Das heißt, es ist als sinnvoll anzunehmen, dass Korrekturen höheren Grades an den ursprünglichen Funktionen keine Rolle spielen. Hierbei erinnere man sich an Aufgabe 7a, wo wir die Taylorreihen der ursprünglichen Funktionen auch rechtzeitig abgebrochen haben.

**Aufgabe 10** *Ableitung einer Matrixfunktion (Klausuraufgabe) (\*\*\*)*

Zeigen Sie, dass sich der Ableitung der Funktion  $f(A) = (A^T A)^{-1}$  mit  $A$  invertierbar gegeben ist durch:

$$f'(A)(B) = -A^{-1}((BA^{-1})^T + BA^{-1})(A^T)^{-1}$$

**Hinweis:** Verwenden Sie die Kettenregel, Produktregel und dass für  $g(A) = A^{-1}$  gilt:  $g'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$ . Es ist hilfreich, wenn Sie  $f$  als Verkettung von zwei Funktionen darstellen.

*Lösung:*

Wie im Hinweis gegeben schreiben wir  $f$  als Verkettung um:

$$f(A) = (g \circ h)(A) \text{ mit } h(A) = A^T A \text{ und } g(X) = X^{-1}$$

Dann schreiben wir die Produktregel (PR) für  $h$  hin (man sieht das sofort mit Hilfe *nützlichen Aussagen* aus der Vorlesung):

$$h'(A)(B) = B^T A + A^T B$$

Nun wendet man die Kettenregel (KR) aus der Vorlesung oder der vorigen Aufgabe an:

$$\begin{aligned} f'(A)(B) &= (g \circ h)'(A)(B) \stackrel{\text{KR}}{=} g'(h(A))(h'(A)(B)) \stackrel{\text{Hinw.}}{=} -(h(A))^{-1} \cdot h'(A)(B) \cdot (A)^{-1} \\ &\stackrel{\text{PR}}{=} -(A^T A)^{-1} \cdot (B^T A + A^T B) \cdot (A^T A)^{-1} = -A^{-1}(A^T)^{-1} \cdot (B^T A + A^T B) \cdot A^{-1}(A^T)^{-1} \\ &= -A^{-1} \cdot ((A^T)^{-1} B^T + BA^{-1}) \cdot (A^T)^{-1} = -A^{-1}((BA^{-1})^T + BA^{-1})(A^T)^{-1} \end{aligned}$$