1 Zwischenklausur

1.1 Elektrostatik

1.1.1

$$\Delta\frac{q}{|\vec{r}|} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\frac{q}{|\vec{r}|}) = \vec{\nabla}(-\frac{q\vec{e}_r}{r^2}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-r^2\frac{q}{r^2}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-q) = 0;\ \text{für } r \neq 0$$

$$\oint(-\frac{q\vec{e}_r}{r^2})d\vec{a} = -\int(\frac{q\vec{e}_r}{r^2})(r^2\sin\theta d\theta d\phi\vec{e}_r) = -(\int_0^\pi q\sin\theta d\theta)(\int_0^{2\pi} d\phi) = -4q\pi = \int dV\vec{\nabla}(-\frac{q\vec{e}_r}{r^2})$$

$$\rightarrow \Delta\frac{q}{|\vec{r}|} = -4\pi q\delta(\vec{r}) \rightarrow \rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$$

1.1.2

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r}e^{-\alpha r} = \frac{q}{r} + q\frac{e^{-\alpha r}-1}{r}$$

$$\Delta(\frac{q}{r} + q\frac{e^{-\alpha r}-1}{r}) = -4\pi q\delta(\vec{r}) + q\Delta\frac{e^{-\alpha r}-1}{r} = -4\pi q\delta(\vec{r}) + q\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{-\alpha r}-1}{r})$$

$$= -4\pi q\delta(\vec{r}) + q\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2(-\frac{1}{r^2}(e^{-\alpha r}-1) - \alpha\frac{1}{r}e^{-\alpha r})] = -4\pi q\delta(\vec{r}) + q\frac{1}{r^2}(\alpha e^{-\alpha r} - \alpha e^{-\alpha r} + r\alpha^2 e^{-\alpha r})$$

$$= -4\pi q\delta(\vec{r}) + q\frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r}$$

$$\rightarrow \rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}) - q\frac{\alpha^2}{4\pi}\frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

1.1.3

$$Q = \int d^3r(q\delta(\vec{r}) - q\frac{\alpha^2}{4\pi}\frac{e^{-\alpha r}}{r}) = q - q\frac{\alpha^2}{4\pi}\int d^3r\frac{e^{-\alpha r}}{r} = q(1-\alpha^2\int_0^\infty dr r e^{-\alpha r}) = q(1+\alpha^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty dr e^{-\alpha r})$$

$$= q(1+\alpha^2\frac{\partial}{\partial\alpha}[\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha r}]_0^\infty) = q(1+\alpha^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\alpha}) = q(1+\alpha^2\frac{-1}{\alpha}) = 0$$

1.2 Magnetostatik

1.2.1

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi}\frac{q}{a^3}\vec{\omega}\times\vec{r} & \text{für } r \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r\vec{r}\times\vec{j} = \frac{1}{2c}\int_{r\leq a} d^3r\frac{3}{4\pi}\frac{q}{a^3}\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{3}{8\pi c}\frac{q}{a^3}\int_{r\leq a} d^3r(\vec{\omega}r^2 - \vec{r}\vec{\omega}\vec{r})$$

$$= \frac{3}{8\pi c}\frac{q}{a^3}\int_{r\leq a} d^3r(\vec{\omega}r^2 - \vec{\omega}\frac{r^2}{3}) = \frac{3}{8\pi c}\frac{q}{a^3}\vec{\omega}\frac{2}{3}4\pi\int_0^a r^4 = \boxed{\frac{qa^2}{5c}\vec{\omega}}$$

dabei wurde im vorvorletzten Schritt der letzte Hinweis benutzt(der richtig r^4 auf der rechten Seite lautet). Durch diese Kenntnis kann man das Integral schon vor dem Ausführen dementsprechend umformen. Man kann den 2. Teil des Integrals auch explizit ausrechen($\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$):

$$\int_{r\leq a} d^3r\vec{r}\vec{\omega}\vec{r} = \int_{r\leq a} d^3r\vec{r}\omega z = \int_{r\leq a} d^3r\omega \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix} = \int_{r\leq a} d^3r\omega r^2 \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi\cos\theta \\ \sin\theta\sin\phi\cos\theta \\ \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= 2\pi\omega \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta r^4 \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2\theta \end{pmatrix} = 2\pi\vec{\omega} \int_0^a dr \int_{-1}^1 dx r^4 x^2 = 2\pi\vec{\omega} \int_0^a dr \frac{2r^4}{3}$$

1.2.2

$$W = -\vec{m}\vec{B} = -\frac{qa^2}{5c}\omega B\cos\theta$$

Die Energie ist minimal für $\vec{\omega}$ parallel zu $\vec{B}$, maximal für $\vec{\omega}$ antiparallel zu $\vec{B}$ und 0 wenn diese senkrecht zueinander stehen.

1.2.3

$$v_t = a\omega \ ; \ |\vec{m}| = \frac{ea^2}{5c}|\vec{\omega}| \ ; \ a = \frac{e^2}{mc^2}$$

$$\rightarrow \vec{m} = \frac{e^3}{5mc^3}v_t \ ; \ \text{experimentell} : \vec{m} = \frac{e}{2mc^2}\gamma$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{v_t}{c} = \frac{5}{2}\frac{\gamma}{e^2} = \frac{5}{2}137 \gg 1}$$

Eine klassische Beschreibung des Elektrons ist daher nicht möglich.

1.3 Punktladung im Feld einer elektromagnetischen Welle

1.3.1

Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \ ; \ \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \ ; \ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \ ; \ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(kz-\omega t) \\ \sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eingesetz in die Maxwell-Gleichungen ergibt sich mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$:

$$\vec{k}\vec{E} = 0 \ ; \ \vec{k}\vec{B} = 0 \ ; \ \vec{k}\times\vec{E} - \frac{\omega}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \ ; \ \vec{k}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\rightarrow \vec{B} = \vec{e}_z \times \vec{E} = \boxed{E_0 \begin{pmatrix} -\sin(kz-\omega t) \\ \cos(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

1.3.2

$$dW = \vec{F} d\vec{s} = \vec{F}\vec{v}dt$$
$$\frac{dW}{dt} = \vec{v}\vec{F} = q\vec{v}(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) = q\vec{v}\vec{E}$$

1.3.3

(a)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{e}_z \times \vec{E})) = q(\vec{E}(1 - \frac{\vec{v}}{c}\vec{e}_z) + \vec{e}_z \frac{\vec{v}}{c}\vec{E})$$

$$\boxed{\frac{dp_x}{dt} = qE_0(1 - \frac{\dot{z}}{c})\cos(kz-\omega t)}$$

$$\boxed{\frac{dp_y}{dt} = qE_0(1 - \frac{\dot{z}}{c})\sin(kz-\omega t)}$$

$$\boxed{\frac{dp_z}{dt} = \frac{q}{c}E_0(\dot{x}\cos(kz-\omega t) + \dot{y}\sin(kz-\omega t)) = \frac{\dot{W}}{c}}$$

(b) Wenn $\dot{W} = 0$ dann ist $\frac{dp_z}{dt} = m\dot{v_{0z}} = 0$ und es folgt $v_{0z} = \text{const.}$, mit $\dot{z}(t=0) = 0$ folgt $v_{0z} = 0$

$$\rightarrow \boxed{z(t) = z_0}$$

Aus $\frac{dp_x}{dt} = qE_0\cos(kz_0 - \omega t)$ und $\frac{dp_y}{dt} = qE_0\sin(kz_0-\omega t)$ folgt($\omega = ck$):

$$m\dot{x} = p_x = \frac{qE_0}{\omega}\sin(\omega t - kz_0) + \bar{p}_x \ ; \ m\dot{y} = p_y = \frac{qE_0}{\omega}\cos(\omega t - kz_0) + \bar{p}_y$$

Die Bedingung $\dot{W} = 0$ impliziert $p_x\cos(kz_0-\omega t) + p_y\sin(kz_0-\omega t) = 0$:

$$\frac{qE_0}{\omega}\sin(\omega t - kz_0)\cos(\omega t - kz_0) + \bar{p}_x\cos(\omega t - kz_0) - \frac{qE_0}{\omega}\cos(\omega t-kz_0)\sin(\omega t-kz_0) - \bar{p}_y\sin(\omega t-kz_0)$$
$$= \bar{p}_x\cos(\omega t-kz_0) - \bar{p}_y\sin(\omega t - kz_0) \rightarrow \bar{p}_x = \bar{p}_y = 0$$

Also $m\dot{x} = p_x = \frac{qE_0}{\omega}\sin(\omega t - kz_0)$ und $m\dot{y} = p_y = \frac{qE_0}{\omega}\cos(\omega t - kz_0)$

$$\rightarrow \boxed{x = -\frac{qE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t - kz_0) + \bar{x}} \ ; \ \boxed{y = \frac{qE_0}{m\omega^2}\sin(\omega t - kz_0) + \bar{y}}$$

Das Teilchen beschreibt also eine Kreisbahn in der $z = z_0$ Ebene mit Mittelpunkt ($\bar{x}$,$\bar{y}$) und Radius $r = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{q^2E_0^2}{m^2\omega^4}} = \frac{qE_0}{m\omega^2}$

(c)Da

$$\vec{p} = \frac{qE_0}{\omega}\begin{pmatrix}\sin(\omega t - kz_0)\\ \cos(\omega t - kz_0)\\ 0\end{pmatrix} = \frac{qE_0}{\omega}\begin{pmatrix}-\sin(kz_0 - \omega t)\\ \cos(kz_0 - \omega t)\\ 0\end{pmatrix}$$

folgt

$$\boxed{\vec{p} = \frac{q}{\omega}\vec{B}} \text{ und } \boxed{|\vec{p}| = \frac{qE_0}{\omega}}$$

2 Klausur

2.1 Spiegelladung

(a)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}|}$$

$$\Phi(\vec{r})|_{\text{Leiter}} = 0$$

(b) Das Potential auf der Leiterfläche ist:

$$\Phi(\vec{r})|_{\text{Leiter}} = \frac{q}{|\vec{r}|} + \frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = 0$$

da $|\vec{r}| = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ für $\vec{r}$ auf der Leiteroberfläche.

$$\vec{E}(\vec{r})_{\text{Leiter}} = -\vec{\nabla}\frac{q}{|\vec{r}|} - \vec{\nabla}\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = q\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}\right) = q\frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}|^3}$$

d.h. $\vec{r}$ steht senkrecht zur Leiteroberfläche.

(c)

$$\int_F d\vec{f}\vec{E}(\vec{r})_{\text{Leiter}} = \int_F df\vec{n}'\vec{E}(\vec{r})_{\text{Leiter}} = q\int_F df\frac{\vec{n}'\vec{r}_0}{|\vec{r}|^3} = -2q\int_F df\frac{\vec{n}\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -2q\Omega$$

wobei $\int_F df\frac{\vec{n}\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \Omega$ (Definition), $\vec{r} = \frac{\vec{r}_0}{2} + \vec{r}_{\text{senkrecht}}$ mit $\vec{r}_{\text{senkrecht}}\vec{n}' = 0$, $\vec{n}'\vec{r}_0 = 2\vec{n}'\vec{r}$ und $\vec{n}' = -\vec{n}$. Wir haben dabei die Konvention für die Richtung von $d\vec{f}$ nicht spezifiziert. Sollte jemand $d\vec{f} = df\vec{n}$ definieren, ist dass auch in Ordnung und man erhält $\int_F d\vec{f}\vec{E}(\vec{r})_{\text{Leiter}} = 2q\Omega$.

2.2 elektromagnetische Wellen

(a) Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \;;\; \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \;;\; \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Daraus folgt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

also:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \ ; \ \vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \text{ (analog)}$$

Wir nehmen nun an:

$$\vec{E} = \vec{E}_0^{(+)} e^{ikz - i\omega t} + \vec{E}_0^{(-)} e^{-ikz - i\omega t}$$

(dem Bild nach verläuft die Welle in z-Richtung)

Aus $\vec{\nabla}\vec{E} = 0 = i\vec{k}[\vec{E}_0^{(+)} e^{ikz-i\omega t} - \vec{E}_0^{(-)} e^{-ikz-i\omega t}]$ mit $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{E}_0^{(+)} = \vec{E}_0^{(-)} = 0$

$$\rightarrow \vec{E}_z = 0 \ ; \ \vec{B}_z = 0 \text{ (analog)}$$

(b)

$$I: \ \vec{E}_I = \vec{E}_{0,I}^{(+)} e^{ikz-i\omega t} + \vec{E}_{0,I}^{(-)} e^{-ikz-i\omega t}$$

$$III: \ \vec{E}_{III} = \vec{E}_{0,III}^{(+)} e^{ikz-i\omega t}$$

Damit die Welle linear polarisiert ist, muss gelten:

$$\vec{E}_0^{\pm} = \begin{pmatrix} E_0^{\pm} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ \vec{B}_0^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm B_0^{\pm} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denn:

$$(1) \ \vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \text{ bzw. } \omega = ck$$

$$(2) \ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \rightarrow \pm\vec{k} \times \vec{E}_0^{\pm} = \frac{\omega}{c}\vec{B}_0^{\pm}$$

(c) Maxwell-Gleichungen im Medium:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \ ; \ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho \ ; \ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$$

mit $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu\vec{H} = \vec{H}$.

(d)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \rightarrow -\vec{\nabla}^2\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}) = 0$$

$$\rightarrow (\vec{\nabla}^2 - \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wir nehmen an dass $\vec{E}_{II} = \vec{E}_{0,II}^{(+)} e^{ik_{II}z - i\omega t} + \vec{E}_{0,II}^{(-)} e^{-ik_{II}z - i\omega t}$

$$\rightarrow -k_{II}^2 + \frac{\epsilon}{c^2}\omega^2 = -i\frac{4\pi\sigma}{c^2}\omega \rightarrow n^2 = \frac{k_{II}c^2}{\omega^2} = \epsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

(e) Die Grenze zwischen (1) und (2) sei bei $z = 0$ und die Grenze zwischen (2) und (3) bei $z = d$. Die Randbedingungen erfordern nun, dass $\vec{E}$, $\vec{B}$ und deren Ableitungen stetig sind:

$$z = 0: \ \vec{E}_{0,I}^{(+)} + \vec{E}_{0,I}^{(-)} = \vec{E}_{0,II}^{(+)} + \vec{E}_{0,II}^{(-)}$$

$$\vec{E}_{0,I}^{(+)} - \vec{E}_{0,I}^{(-)} = n(\vec{E}_{0,II}^{(+)} - \vec{E}_{0,II}^{(-)}) \ ; \ n = \frac{k_{II}}{k} = \frac{k_{II}c}{\omega}$$

$$z = d: \ \vec{E}_{0,II}^{(+)} e^{ik_{II}d} + \vec{E}_{0,II}^{(-)} e^{ik_{II}d} = \vec{E}_{0,III}^{(+)} e^{ikd}$$

$$n(\vec{E}_{0,II}^{(+)} e^{ik_{II}d} - \vec{E}_{0,II}^{(-)} e^{ik_{II}d}) = \vec{E}_{0,III}^{(+)} e^{ikd}$$

(f)

$$R = |\frac{\vec{E}_{0,I}^{(-)}}{\vec{E}_{0,I}^{(+)}}|^2 \ ; \ T = |\frac{\vec{E}_{0,III}^{(+)}}{\vec{E}_{0,I}^{(+)}}|^2$$

(g) Wir definieren: $\rho = \frac{\vec{E}_{0,I}^{(-)}}{\vec{E}_{0,I}^{(+)}}$, $\tau = \frac{\vec{E}_{0,III}^{(+)}}{\vec{E}_{0,I}^{(+)}}$, $\alpha = \frac{\vec{E}_{0,II}^{(+)}}{\vec{E}_{0,I}^{(+)}}$, $\beta = \frac{\vec{E}_{0,II}^{(-)}}{\vec{E}_{0,I}^{(+)}}$. Dann folgt aus den Stetigkeitsbedingungen:

$$(1) \ 1 + \rho = \alpha + \beta \ ; \ (2) \ 1 - \rho = n(\alpha - \beta)$$

$$(3) \ \alpha e^{ik_{II}} d + \beta e^{-ik_{II}} d = \tau e^{ikd} \ ; \ (4) \ n(\alpha e^{ik_{II}} d - \beta e^{-ik_{II}} d) = \tau e^{ikd}$$

$$(1),(2) \ \rightarrow \beta = \frac{n - 1 + (n+1)\rho}{2n} \ ; \ \alpha = \frac{n + 1 + (n-1)\rho}{2n}$$

$$\text{mit (3)} \ \rightarrow \tau e^{ikd} = \frac{n + 1 + (n-1)\rho}{2n} e^{ik_{II}d} \ ; \ \frac{n - 1 + (n+1)\rho}{2n} e^{-ik_{II}d}$$

alles in (4):

$$n(\frac{n + 1 + (n-1)\rho}{2n} e^{ik_{II}} d - \frac{n - 1 + (n+1)\rho}{2n} e^{-ik_{II}} d) = \frac{n + 1 + (n-1)\rho}{2n} e^{ik_{II}d} ; \ \frac{n - 1 + (n+1)\rho}{2n} e^{-ik_{II}d}$$

$$\rightarrow ((n-1)^2 e^{ik_{II}d} - (n+1)^2 e^{-ik_{II}d})\rho = (n^2 - 1)e^{-ik_{II}d} - (n^2 - 1)e^{ik_{II}d}$$

$$\rightarrow \rho = \frac{(n^2 - 1)e^{-ik_{II}d} - (n^2 - 1)e^{ik_{II}d}}{(n-1)^2 e^{ik_{II}d} - (n+1)^2 e^{-ik_{II}d}} = (n^2 - 1)\frac{-2i\sin(k_{II}d}{-4n\cos(k_{II}d) + 2i(n^2+1)\sin(k_{II}d)} \ ; \ R = |\rho|^2$$

Für $\tau = 0$, $n = \sqrt{\epsilon}$ und $k_{II} = nk = \sqrt{\epsilon}k$:

$$R = |\rho|^2 = (n^2-1)^2 \frac{4\sin^2(k_{II}d}{16n\cos^2(k_{II}d) + 4(n^2+1)^2\sin^2(k_{II}d)} = \boxed{\frac{\sin^2(nkd)}{\sin(nkd)^2 + \gamma}}$$

da $\cos^2(k_{II}d) = 1 - \sin^2(k_{II}d)$ und mit $\gamma = \frac{2n}{1-n^2}$.

$R_{max} = \frac{1}{1+\gamma}$, $\lambda = \frac{2\pi}{nk}$:

$$R = R_{max} \text{ für } d = \frac{\lambda}{4}(2j+1)\ ;\ \lambda = \frac{4d}{2j+1}\ ;\ j \in \mathbb{N}$$

$$R = 0 \text{ für } d = \frac{\lambda}{2}j\ ;\ \lambda = \frac{2d}{j}\ ;\ j \in \mathbb{N}$$