Ferienkurs Elektrodynamik

Ausbreitung Elektromagnetischer Wellen
Stand: 22. März 2012

Übungsblatt WS11/12

1. Zirkular polarisierte Welle

Eine im Vakuum in x-Richtung laufende, zirkular polarisierte Welle wird durch das elektrische Feld:

$$\vec{E}(\vec{r,t}) = \Re[f(x-ct)(\vec{e}_y + i\vec{e}_z)] \tag{0.1}$$

beschrieben werden, wobei $\vec{e}_{y,z}$ Einheitsvektoren in y- und z-Richtung sind und f eine beliebige komplexwertige Funktion darstellt.

Ermitteln sie aus den Maxwell-Gleichungen das zugehörige Magnetfeld. Berechnen sie die Energiedichte und die Energiestromdichte $\vec{S}(\vec{r},t)$.

Lösung:

$$\vec{E}(\vec{r,t}) = \Re[f(x-ct)(\vec{e}_y + i\vec{e}_z)] = \Re f(x-ct)\vec{e}_y - \Im[f(x-ct)]\vec{e}_z \tag{0.2}$$

Aus den Maxwellgleichungen folgt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{B} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Im(f'(x-ct)) \\ \Re(f'(x-ct)) \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{B}}_x = 0 \rightarrow B_y = c = 0 \tag{0.4}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{B}}_y = -c\Im(f'(x-ct)) \rightarrow B_y = \Im(f(x-ct)) \tag{0.5}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{B}}_z = -c\Re[f'(x-ct)] \rightarrow B_z = \Re f(x-ct) \tag{0.6}$$

also insgesamt:

$$\vec{B} = (f(x-ct)\vec{e}_y + \Re f(x-ct)\vec{e}_z) = \Re(f(x-ct)(\vec{e}_z - i\vec{e}_y)) \tag{0.7}$$

Energiedichte: $\vec{D} = \vec{E}$,$\vec{H} = \vec{B}$

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}\vec{D} - \vec{H}\vec{B}) = \frac{1}{2}(|E|^2 + |B|^2) = \frac{1}{2}(|f^2| + |f|^2) = \frac{1}{8\pi}|f|^2 \tag{0.8}$$

Energiestromdichte

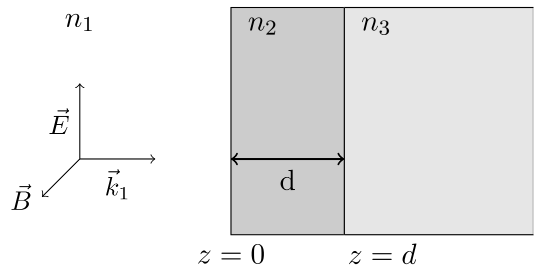
$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H} = [E_y H_z - E_z H_y]\vec{e}_x = \frac{c}{4\pi}|f|^2\vec{e}_x \tag{0.9}$$

gemittelte Energiestromdichte:

$$\vec{S} = |f|^2\vec{e}_x\frac{c}{8\pi} \tag{0.10}$$

2. Brechung einer elektromagnetischen Welle

Eine ebene Welle der Frequenz ω falle senkrecht auf die in der nebenstehenden Abbildung gezeigte Zwischenschicht. Die Brechungsindizes der nichtmagnetischen Medien (ohne Oberflächenladung und Strömen) seien n_1, n_2 und n_3. Die Dicke der Zwischenschicht sei d, während die anderen beiden Medien jeweils einen Halbraum ausfüllen.Berechnen sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten.



Gehen sie dabei folgendermaßen vor:

a Bestimmen sie $\vec{E}$ und $c \cdot \vec{B}$ für die drei Raumbereiche. Mehrfache Reflexionen und Transmissionen werden nicht berücksichtigt. Das dritte Medium hat in Richtung z keine Begrenzung mehr.

b Stellen sie die Randbedingungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf.

c Wie würden sie weiterhin vorgehen um die Transmission und Reflexion zu berechnen?

Lösung:

Allgemein gilt:

$$k_i = \frac{\omega n_i}{c} \tag{0.11}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{0.12}$$

$$\vec{B} \overset{\text{MW Gl.}}{=} \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{0.13}$$

a) Der Ausbreitungsort der Welle ist in 3 Bereiche eingeteilt.

$z < 0$: normale Welle und reflektierte Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k_1 z-\omega t)} + \vec{E}_1 e^{i(-k_1 z-\omega t)} \tag{0.14}$$

$$c\vec{B} = n_1(\vec{e}_z \times \vec{E}_0) e^{i(k_1 z-\omega t)} - n_1(\vec{e}_z \times \vec{E}_1) e^{i(-k_1 z-\omega t)} \tag{0.15}$$

$0 < z < d$: transmittierte und bei n_2 reflektierte Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_2 e^{i(k_2 z-\omega t)} + \vec{E}_3 e^{i(-k_2 z-\omega t)} \tag{0.16}$$

$$c\vec{B} = n_2(\vec{e}_z \times \vec{E}_2) e^{i(k_2 z-\omega t)} - n_2(\vec{e}_z \times \vec{E}_3) e^{i(-k_2 z-\omega t)} \tag{0.17}$$

$z > d$: **transmittierte Welle**

$$\vec{E} = \vec{E}_4 e^{i(k_3 z - \omega t)} \tag{0.18}$$

$$c\vec{B} = n_3(\vec{e}_z \times \vec{E}_4) e^{i(k_3 z - \omega t)} \tag{0.19}$$

b) Stetigkeit der E-Feld x-Komponente bei
z=0 $E_{0x} + E_{1x} = E_{2x} + E_{3x}$
z=d $E_{2x} e^{ik_2 d} + E_{3x} e^{-ik_2 d} = E_{4x} e^{ik_3 d}$

Stetigkeit der B-Feld y-Komponente bei
z=0 $n_1(E_{0x} - E_{1x} = n_2(E_{2x} - E_{3x}))$ (3)
z=d $n_2(E_{2x} e^{ik_2 d} - E_{3x} e^{-ik_2 d}) = n_3 E_{4x} e^{ik_3 d}$

c)
- ineinander einsetzen der Randbedingungen um die E_i zu bestimmen.
- Berechnung des Poynting Vektors für einfallende, reflektierte und Transmittierte Welle.
- $T = \frac{S_{trans}}{S_{einf}}$ und $R = \frac{S_{refl}}{S_{einf}}$

3. Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Zeigen sie, dass jede zweimal differenzierbare Funktion der Gestalt $f(x - ct)$ oder $f(x + ct)$ die (eindimensionale, homogene) Wellengleichung löst.

Lösung:

Man nennt $x \pm ct = u_\pm$. so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} = f' \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'' \tag{0.20}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm c\frac{df}{du} = \pm c f' \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 f'' \tag{0.21}$$

Damit ist die Differentialgleichung offensichtlich identisch erfüllt.

4. Gauss'sches Wellenpaket

Die Amplitudenverteilung eines Wellenpakets lasse sich mit einer Gaußverteilung beschreiben.

$$A(k) = \frac{1}{\Delta k\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{k-k_0}{\sqrt{2}\Delta k}\right)^2} \tag{0.22}$$

Berechnen sie die Fouriertransformierte um die Welle im Ortsraum zu betrachten. (Quadratische Ergänzung!)

Lösung:

$$u(z,0) = \frac{1}{\Delta k(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' exp[-(\frac{k'}{\Delta k\sqrt{2}})^2] e^{i(k'+k_0)z} \tag{0.23}$$

es wurde $k - k_0 = k'$ verwendet.

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{\Delta k(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-(\frac{k'^2}{2\Delta k^2})+ik'z} \tag{0.24}$$

$$= \frac{e^{ik_0 z}}{\Delta k(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-(\frac{k'}{\sqrt{2}\Delta k} - \frac{i\sqrt{2}}{2} z\Delta k)^2 - \frac{1}{2} z^2 \Delta k^2} \tag{0.25}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{ik_0 z} e^{-\frac{(\Delta k)^2 z^2}{2}} \tag{0.26}$$

5. Ebene elektromagnetische Welle

Betrachten sie eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum, gegeben durch:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{0.27}$$

wobei $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ komplexe Größen sein können. Es gilt $|k| = \frac{\omega}{c}$.

a) Zeigen sie, dass die angegebenen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Lösungen der homogenen Maxwellgleichungen sind.

b) Zeigen sie, dass die Wellen transversal sind. (Was heißt das?)

Lösung:

a) Die Maxwellgleichungen lauten:

$$(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E} = 0 \tag{0.28}$$

$$(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{B} = 0 \tag{0.29}$$

$$\tag{0.30}$$

Nun müssen lediglich die Formel für die Wellen eingesetzt werden.

b) transversal: $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{E} = 0$

mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ folgt:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \tag{0.31}$$

Des weiteren ergibt sich aus den homogenen Maxwellgleichungen :

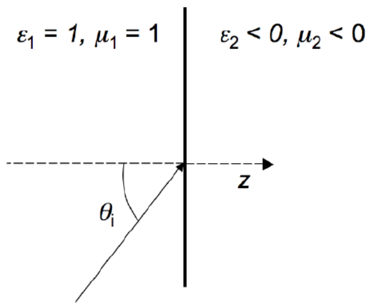
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (i\vec{k} \times \vec{E}_0 - \frac{i\omega}{c}\vec{B}_0) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \tag{0.32}$$

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow \vec{B}_0 = \frac{c\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 = \boxed{\sqrt{\mu\epsilon}\vec{n} \times \vec{E}_0} \\
&\rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{c}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \boxed{\sqrt{\mu\epsilon}\frac{\vec{k} \times \vec{E}}{|k|}}
\end{aligned}
\tag{0.33}
$$

$\vec{E}$,$\vec{B}$ und $\vec{k}$ bilden ein Orthogonalsystem.

6. Ebene elektromagnetische Welle

Wir betrachten eine elektromagnetische Welle in einem Material mit reelem, negativen ϵ_2 und μ_2



a) Argumentieren sie ausgehend von den Maxwellgleichungen, dass der Wellenvektor $\vec{k}$ antiparallel zum Poynting-Vektor $\vec{S}$ der Welle steht. Die Formel aus der Vorlesung kann dabei verwendet werden.

b) Betrachten Sie nun eine elektromagnetische Welle, die aus dem Vakuum auf eine planare Grenzfläche zu diesem Material trifft. Bestimmen sie mit dem Gesetz von Snellius den Winkel, den die transmittierte Welle zur Grenzfläche bildet.

c) Die einfallende Welle sei senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Zeigen sie ausgehend von den Stetigkeitsbedingungen, die an der Grenzfläche gelten, dass für das Verhältnis der Amplituden des elektrischen Feldes der einfallenden und transmittierten Welle gilt:

$$
\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i - \frac{1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - \sin^2\theta_i}} \tag{0.34}
$$

Lösung:

a) Im Medium breitet sich die Welle laut der Maxwell'schen Gleichungen aus. Die Welle wird dann wie folgt dargestellt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \text{ und } \mathbf{B} = \frac{c}{\omega}\left(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \tag{19}$$

Der zeitlich gemittelte Poynting-Vektor $\bar{\mathbf{S}}$ aus dem Skript:

$$\overline{\mathbf{S}} = \mathrm{sign}(\mu(\omega))\frac{c}{2}\sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}}\left|\mathbf{E}_0\right|^2\hat{k} \tag{20}$$

$\mathbf{k}$ ist also antiparallel zu $\mathbf{S}$, da $\mu < 0$.

b) Das Snellius-Gesetz besagt

$$\frac{sin\alpha_i}{sin\alpha_t} = \frac{n_2}{n_1} \tag{21}$$

mit $n_1 = 1$ folgt:

$$sin\alpha_t = \frac{1}{n_2}sin\alpha_i; \tag{22}$$

wobei hier sehr wichtig ist, dass der resultierende Winkel negativ ist! Bei Stoffen mit negativer Brechzahl wird ein auftreffender Lichtstrahl nicht, wie bei herkömmlichen Stoffen, zum Lot hin gebrochen, sondern über das Lot hinaus in die negative Richtung. Der Lichtstrahl befindet sich also sowohl innerhalb als auch außerhalb des Materials auf derselben Seite des Lots. Das inverse Snellius'sche Gesetz führt bei gekrümmten Flächen zu einer Vertauschung von konvergenter und divergenter Strahlführung, d. h., konkave Linsen bündeln, konvexe Linsen streuen.(s. Wikipedia. Negativer Brechungsindex)

c) Die Stetigkeitsbedingung für das E-Feld, mit $\mathbf{n}$ als den Normaleneinheitsvektor der Grenzfläche, lautet:

$$(\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r} - \mathbf{E}_{0t})\times\mathbf{n} = 0 \tag{23}$$

Für das H-Feld ist sie:

$$\left[\frac{1}{\mu_1}(\mathbf{k}_i\times\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{k}_r\times\mathbf{E}_{0r}) - \frac{1}{mu_2}(\mathbf{k}_t\times\mathbf{E}_{0t})\right]\times\mathbf{n} = 0 \tag{24}$$

Da die Welle senkrecht polarisiert ist, vereinfacht sich das ganze zu:

$$E_{0i} + E_{0r} - E_{0t} = 0 \tag{25}$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_i\underbrace{(E_{0i} - E_{0r})}_{2E_{0i}-E_{0t}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}E_{0t}\cos\alpha_t = 0 \tag{26}$$

$$2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}E_{0i}\cos\alpha_i = (\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_t)E_{0t} \tag{27}$$

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\mu_2\cos\alpha_i}{\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\mu_2\cos\alpha_i - \sqrt{\epsilon_2\mu_2}\mu_1\cos\alpha_t} \tag{28}$$

Mit dem Brechungsindex $n_2 = -\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$ und dem Snellius-Gesetz lässt sich dies nochmals vereinfachen:

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1\mu_2\cos\alpha_i}{n_1\mu_2\cos\alpha_i + n_2\mu_1\cos\alpha_t} \tag{29}$$

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1\cos\alpha_i}{n_1\cos\alpha_i - \dfrac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha_i}} = \frac{2\cos\alpha_i}{\cos\alpha_i - \frac{1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha_i}} \tag{30}$$

Wobei im letzten Schritt noch $n_1 = 1$ und $\mu_1 = 1$ eingesetzt wurde.