Bemerkung: Aufgaben 1-4 sind hier in SI-Einheiten gelöst!

1 Induktion und Verschiebungsstrom

Ein unendlich langes, gerades Kabel führt einen langsam veränderlichen Strom $I(t)$.
(a) Bestimmen sie das elektrische Feld als Funktion vom Abstand s vom Kabel.
(b) Nun wird um das Kabel ein zylinderförmiger Mantel mit Radius a gelegt, in dem der Strom zurückfließt(„Koaxialkabel"). Desweiteren fließe nun der Strom $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Wie lautet jetzt das elektrische Feld?
(c) Bestimmen sie hieraus die Verschiebungsstromdichte $\vec{j}_d$ und den gesamten Verschiebungsstrom I_d.
(d) Vergleichen sie I_d mit I. Wie hoch müsste die Frequenz ω sein, damit bei einem Kabel mit Außendurchmesser 2mm der Verschiebungsstrom 1% von I ist?

1.1 Lösungsvorschlag

(a) In der quasistatischen Näherung ist das Magnetfeld: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\vec{e}_\phi$ Wie das B-Feld eines Solenoid verläuft E hier parallel zur Achse. Für ein geschlossenes Rechteck der Länge l parallel zur Achse außerhalb des Kabels gilt nach dem „Ampere'schen Gesetz":

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = E(s_0)l - E(s)l = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}d\vec{a} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}\int_{s_0}^{s}\frac{1}{s'}ds' = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}(\ln s - \ln s_0)$$

Damit ergibt sich für das elektrische Feld:

$$\vec{E}(s) = (\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln s + C)\vec{e}_z$$

Wobei C eine Konstante bzw. eine Funktion von t ist und vom genauen $I(t)$ abhängt.

(b) Außerhalb des Zylinders ist $B = 0$ und damit auch E. Innerhalb übernimmt nun s die Rolle von s_0 und a von s aus Teil (a), da $s < a$ gilt. Damit und mit dem gegebenen $I(t)$ erhält man:

$$\vec{E}(s) = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} sin(\omega t)\ln(\frac{a}{s})\vec{e}_z$$

(c) $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\mu_0 I_0 \omega^2}{2\pi} cos(\omega t)\ln(\frac{a}{s})\vec{e}_z = \frac{\mu_0\epsilon_0}{2\pi}\omega^2 I \ln(\frac{a}{s})\vec{e}_z$

$$I_d = \int \vec{j}_d d\vec{a} = \frac{\mu_0\epsilon_0\omega^2 I}{2\pi}\int_0^a \ln(\frac{a}{s})(2\pi s ds) = \mu_0\epsilon_0\omega^2 I\int_0^a (s\ln a - s\ln s)ds) = \mu_0\epsilon_0\omega^2 I[ln(a)\frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2}lns + \frac{s^2}{4}]_0^a$$

$$= \frac{\mu_0\epsilon_0\omega^2 I a^2}{4}$$

(d) $\frac{I_d}{I} = \frac{\mu_0\epsilon_0\omega^2 a^2}{4} = 0.01 \rightarrow \omega = 6 \times 10^{10}$ (Mikrowelle)

2 Poteniale und Felder

(a) Finden sie die Felder zu den Potentialen $V(\vec{r},t) = 0$ und $\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$.
(b) Nun seien $V(\vec{r},t) = 0$ und $\vec{A}(\vec{r},t) = A_0 \sin(kx - \omega t)\vec{e}_y$. Bestimmen sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und überprüfen sie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum. Welche Bedingungen müssen sie für ω und k fordern?

2.1 Lösungsvorschlag

(a)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial A}{\partial t} = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r} \; ; \; \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \boxed{0}$$

Das ist das Feld einer im Ursprung ruhenden Punktladung.

(b)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial A}{\partial t} = \boxed{A_0 \omega \cos(kx - \omega t)\vec{e}_y}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial x}[A_0 \sin(kx - \omega t)] = \boxed{A_0 k \cos(kx - \omega t)\vec{e}_z}$$

Damit gilt $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ $\boxed{\text{ok}}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial x}[A_0 \omega \cos(kx - \omega t)] = -A_0 \omega k \sin(kx - \omega t)\vec{e}_z \; ; \; -\frac{\partial B}{\partial t} = -A_0 \omega k \sin(kx - \omega t)\vec{e}_z \; \boxed{\text{ok}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{e}_y \frac{\partial}{\partial x}[A_0 k \omega \cos(kx - \omega t)] = -A_0 k^2 \sin(kx - \omega t)\vec{e}_y \; ; \; \frac{\partial E}{\partial t} = A_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t)\vec{e}_y$$

Damit $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ gilt, muss $\boxed{k^2 = \mu_o \epsilon_0 \omega^2}$ gelten, bzw. mit $c^2 = \frac{1}{\mu_o \epsilon_0}$, $\boxed{\omega = ck}$. Das ist die Dispersionsrelation für Licht im Vakuum.

3 retardierte Potentiale

Ein Stromkreis, der aus zwei konzentrischen Halbkreisen unterschiedlicher Radien besteht, die geradlinig verbunden sind, trägt den Strom $I(t) = kt$. Berechnen sie das retardierte Potential $\vec{A}$ im Mittelpunkt der Halbkreise und daraus das dortige elektrische Feld. Warum produziert dieser elektrisch neutrale Stromkreis überhaupt ein elektrisches Feld? Warum können sie mit diesem Ausdruck für $\vec{A}$ nicht das magnetische Feld berechnen?

3.1 Lösungsvorschlag

$$\vec{A}_{ret} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{k(t - (\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{c}))}{\vec{r} - \vec{r}'} = \frac{\mu_0 k}{4\pi}[t \int \frac{d\vec{l}}{\vec{r} - \vec{r}'} - \frac{1}{c} \int d\vec{l}]]$$

da aber das Linienintegral um die ganze Kurve $\int d\vec{l} = 0$ ist, folgt:

$$\vec{A}_{ret}(0,t) = \frac{\mu_0 k}{4\pi}[\frac{1}{r_1} \int_1 d\vec{l} + \frac{1}{r_2} \int_1 d\vec{l} + 2\vec{e}_x \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x}] = \frac{\mu_0 k}{4\pi}[\frac{1}{r_1}(2r_1) + \frac{1}{r_2}(-2r_2) + 2\ln\frac{r_2}{r_1}]\vec{e}_x = \boxed{\frac{\mu_0 kt}{2\pi} \ln(\frac{r_2}{r_1})\vec{e}_x}$$

da $\int_1 d\vec{l} = 2r_1\vec{e}_x$ (innerer Halbkreis) und $\int_2 d\vec{l} = -2r_2\vec{e}_x$ (äußerer Halbkreis), denn:

$$\int_1 d\vec{l} = \int_\pi^0 d\phi r_1\vec{e}_\phi = -\int_0^\pi d\phi r_1\vec{e}_\phi = \int_0^\pi d\phi r_1 \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_2 d\vec{l} = \int_0^\pi d\phi r_2\vec{e}_\phi = \int_0^\pi d\phi r_1 \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{r_2}^{r_1} dx\frac{-\vec{e}_x}{x} + \int_{r_1}^{r_2} dx\frac{\vec{e}_x}{x} = 2\vec{e}_x\int_{r_1}^{r_2}\frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \vec{E}(0,t) = -\frac{\partial A}{\partial t} = \boxed{-\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln(\frac{r_2}{r_1})\vec{e}_x}$$

Das veränderliche Magnetfeld induziert das elektrische Feld. Man kann das B-Feld nicht berechnen, da man das Vektorpotential nur an einem Punkt kennt und somit seine Rotation nicht berechnen kann.

4 sich drehender geladener Ring

Sie haben einen Plastikring auf dem Ladung aufgeklebt ist, so dass die Linienladungsdichte $\lambda = \lambda_0|\sin(\frac{\theta}{2})|$ ist. Nun drehen sie den Ring mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse. Finden sie die exakten Ausdrücke für das skalare und das Vektorpotential im Mittelpunkt.(Hinweise: $\lambda = \lambda(\phi,t)$ mit $\theta = \phi - \omega t$, $\int_0^{2\pi}\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta+\omega t)d\theta = -\frac{4}{3}\sin(\omega t)$, $\int_0^{2\pi}\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\theta+\omega t)d\theta = -\frac{4}{3}\cos(\omega t)$)

4.1 Lösungsvorschlag

$$V(0,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda}{\vec{r}-\vec{r}'}dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda_0|\sin(\frac{\phi-\omega t_r}{2})|}{a}ad\phi = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\sin(\frac{\theta}{2})d\theta$$

da $d\phi = d\theta$ für ein fixes t_r, denn $|\vec{r}'| = const.$

$$V(0,t) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}[-2\cos(\frac{\theta}{2})]_0^{2\pi} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}[2-(-2)] = \boxed{\frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0}}$$

Für den elektrischen Strom gilt: $\vec{I}(\phi,t) = \lambda\vec{v} = \lambda_0\omega a|\sin(\frac{\phi-\omega t}{2})|\vec{e}_\phi$

$$\vec{A}(0,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{I}}{\vec{r}-\vec{r}'}dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda_0\omega a|\sin(\frac{\phi-\omega t_r}{2})|\vec{e}_\phi}{a}ad\phi =$$

$$\frac{\mu_0\lambda_0\omega a}{4\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(\frac{\phi-\omega t_r}{2})|(-\sin\phi\vec{e}_x + \cos\phi\vec{e}_y)d\phi =$$

$$\frac{\mu_0\lambda_0\omega a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\frac{\theta}{2})(-\sin(\theta+\omega t_r)\vec{e}_x+\cos(\theta+\omega t_r)\vec{e}_y)d\theta = \boxed{\frac{\mu_0\lambda_0\omega a}{3\pi}[\sin(\omega(t-\frac{a}{c}))\vec{e}_x - \cos(\omega(t-\frac{a}{c}))\vec{e}_y]}$$

5 elektrische Dipolstrahlung

(a) Ausgehend von dem exakten Ausdruck für das Potential einer harmonisch oszillierenden Ladungsverteilung

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\,\vec{A}_0 e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\, e^{i\omega t}\frac{1}{c}\int d^3r'\,\vec{j}_0(\vec{r}')\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

leiten sie den Ausdruck für den elektrischen Dipolanteil der Stahlung weit weg von der Quelle her.
(b) Berechnen sie die Felder, die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel und die gesamte abgestrahlte Leistung für die elektrische Dipolstrahlung.(Hinweis: vernachlässigen sie Terme die mit $\frac{1}{r^2}$ abfallen)
(c) Wie groß ist der Strahlungswiderstand bei einem reinen Dipol mit $\rho(t) = q_0\cos(\omega t)$? Das ist der Widerstand, der zum gleichem durchschnittlichen Leistungsverlust (aufgrund von Hitze) führen würde wie durch Abstrahlung auftritt. Zeigen sie dass er durch $R = 790\frac{d}{\lambda}^2\Omega$ gegeben ist. Wie groß ist er für einen Radio mit $d = 5$cm?

5.1 Lösungsvorschlag

(a) Für das Fernfeld benutzt man:

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r\sqrt{1-2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}} = r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}$$

da $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$. Damit:

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow \frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\vec{k}\vec{r}'}$$

mit $\vec{k} = k\frac{\vec{r}}{r}$. Man hat jetzt:

$$\vec{A}_0 = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r'\,\vec{j}_0(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\vec{r}'}$$

Bei der Dipolnäherung ersetzt man jetzt die Exponentialfunktion durch 1 und man erhält:

$$\vec{A}_0 = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r'\,\vec{j}_0(\vec{r}') = -\frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r'\,\vec{r}'(\vec{\nabla}'\vec{j}_0(\vec{r}')) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r'\,\vec{r}'\dot{\rho}(\vec{r}') = -i\omega\frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3r'\,\vec{r}'\rho(\vec{r}') = -i\omega\vec{d}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = -ik\frac{e^{ikr}}{r}\vec{d}e^{i\omega t}}$$

(b)

$$\vec{B}_0^{E1}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_0(\vec{r}) = k^2\left(1+\frac{i}{kr}\right)\frac{e^{ikr}}{r}(\vec{e}_r\times\vec{d}) \approx \boxed{k^2\frac{e^{ikr}}{r}(\vec{e}_r\times\vec{d})}$$

da für (Vektor-)Felder $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r)$ gilt: $\vec{\nabla} = \vec{e}_r\partial_r$

$$\vec{E}_0^{E1}(\vec{r}) = \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}_0^{E1}(\vec{r}) = \boxed{k^2\frac{e^{ikr}}{r}(\vec{e}_r\times\vec{d})\times\vec{e}_r = \vec{B}_0^{E1}\times\vec{e}_r}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \quad \rightarrow < \vec{S} >= \frac{c}{8\pi} \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{< \vec{S} > d\vec{F}}{d\Omega} = \frac{< \vec{S} > \vec{e}_r r^2 d\Omega}{d\Omega} = \frac{cr^2}{8\pi} \vec{e}_r (\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0) = \frac{cr^2}{8\pi} \vec{e}_r [(\vec{B}_0^* \times \vec{e}_r) \times \vec{B}_0] = \frac{cr^2}{8\pi} \vec{e}_r [\vec{e}_r (\vec{B}_0^* \vec{B}_0) - \vec{B}_0 (\vec{e}_r \vec{B}_0)]$$

$$= \frac{cr^2}{8\pi} |\vec{B}_0|^2 = \frac{c}{8\pi} k^4 |\vec{e}_r \times \vec{d}|^2 = \boxed{\frac{c}{8\pi} k^4 |\vec{d}|^2 \sin^2 \theta}$$

$$< P >= \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \frac{dP}{d\Omega}(\theta) d\theta = \boxed{\frac{c}{3} k^4 |\vec{d}|^2}$$

da $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$
(c) Um numerisch korrekte Werte zu erhalten wechseln wir in das SI-System durch $\frac{1}{c^2} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$. Damit erhält man:

$$< P >_{rad} = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} |\vec{d}|^2$$

Andererseits gilt:

$$P = UI = I^2 R = q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) R \quad \rightarrow < P > \frac{1}{2} q_0^2 \omega^2 R$$

Es soll gelten:

$$< P >=< P >_{rad} \rightarrow \boxed{R = \frac{\mu_0 d^2 \omega^2}{6\pi c}}$$

$$R = \frac{\mu_0 d^2}{6\pi c} \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} = \frac{2}{3} \pi \mu_0 c (\frac{d}{\lambda})^2 = \boxed{790 \frac{d}{\lambda}^2 \Omega}$$

Mit $d = 5$cm und $\lambda \approx 1000$m folgt $R = 2 \times 10^{-6} \Omega$, was sehr klein ist verglichen mit dem Gesamtwiderstand eines Radios.