Ferienkurs Elektrodynamik WS 11/12
Übungsblatt 1

Tutoren:
Isabell Groß, Markus Krottenmüller, Martin Ibrügger

19.03.2012

Aufgabe 1 - Geladene Hohlkugel

In einer Hohlkugel befindet sich zwischen den Radien r_1 und r_2 eine konstante Raumladungsdichte ρ. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Lösung:

Es gilt bei Kugelsymmetrie, dass $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{e}}_r$

$$\begin{aligned}
&\int_F d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_V d^3r \rho(r) = 4\pi Q_{eing}(r) \\
\Rightarrow \qquad &\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q_{eing} \frac{\mathbf{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

daher:

$$\begin{aligned}
Q_{eing} &= 0 && \text{für} \quad r < r_1 \\
Q_{eing}(r) &= 4\pi \int_{r_1}^{r} dr r^2 \rho = \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - r_1^3) && \text{für} \quad r_1 < r < r_2 \\
Q_{eing}(r) &= \frac{4}{3}\pi\rho(r_2^3 - r_1^3) && \text{für} \quad r_2 < r
\end{aligned}$$

somit:

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } \ r < r_1 \\ \frac{4}{3}\pi\rho(r - \frac{r_1^3}{r^2}) & \text{für } \ r_1 < r < r_2 \\ \frac{4}{3}\pi\rho\frac{(r_2^3 - r_1^3)}{r^2} & \text{für } \ r_2 < r \end{cases}$$

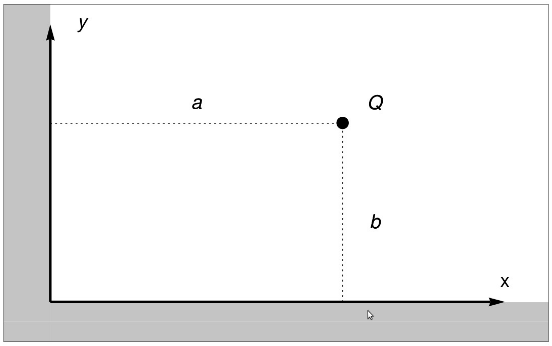
Aufgabe 2 - Spiegelladungen

Eine Ladung Q ist am Ort $\mathbf{r}_0 = (a, b, 0)$ vor einer unendlich langen, geerdeten Winkelplatte (Winkel 90°) fixiert, siehe Abbildung.

a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential im Bereich $x > 0$ und $y > 0$ mittels Spiegelladungen.

b) Berechnen und interpretieren Sie die auf die Ladung wirkende Kraft.

c) Berechnen Sie die induzierte Oberflächenladungsdichte σ auf der Winkelplatte.



Lösung:

a) Mit der Methode der Spiegelladungen erhält man sehr schnell einen Ausdruck fur das elektrostatische Potential für $x > 0$ und $y > 0$, nämlich als Überlagerung einer realen und dreier imaginärer Ladungen (wobei die doppelt gespiegelte Ladung die Ladung $+Q$ trägt):

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_{(a,b,0)}(\mathbf{r}) + \Phi_{(-a,-b,0)}(\mathbf{r}) + \Phi_{(a,-b,0)}(\mathbf{r}) + \Phi_{(-a,b,0)}(\mathbf{r}) \\ &= Q\left[\frac{1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{e}}_x - b\hat{\mathbf{e}}_y|} + \frac{1}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_y|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_y|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{e}}_x - b\hat{\mathbf{e}}_y|}\right]\end{aligned}$$

b) Die Kraft auf die Ladung wird duch die drei imaginären Ladungen erzeugt:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -Q\boldsymbol{\nabla}\left[\Phi_{(-a,-b,0)}(\mathbf{r}) + \Phi_{(a,-b,0)}(\mathbf{r}) + \Phi_{(-a,b,0)}(\mathbf{r})\right]_{(a,b,0)} \\ &= Q^2\left[\frac{\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_y}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_y|^3} - \frac{\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_y}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_y|^3} - \frac{\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{e}}_x - b\hat{\mathbf{e}}_y}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{e}}_x - b\hat{\mathbf{e}}_y|^3}\right]_{(a,b,0)} \\ &= Q^2\left[\frac{2a\hat{\mathbf{e}}_x + 2b\hat{\mathbf{e}}_y}{|2a\hat{\mathbf{e}}_x + 2b\hat{\mathbf{e}}_y|^3} - \frac{2b\hat{\mathbf{e}}_y}{|2b\hat{\mathbf{e}}_y|^3} - \frac{2a\hat{\mathbf{e}}_x}{|2a\hat{\mathbf{e}}_x|^3}\right] = Q^2\left[\frac{a\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_y}{4\sqrt{a^2+b^2}^3} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_y}{4b^2} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_x}{4a^2}\right]\end{aligned}$$

es wirkt eine zum Winkel hin anziehende Kraft.

c) An der äußeren Oberfläche des Leiters gild nach Anwendung des Gaussschen Satzes auf $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ und der Tatsache, dass in einem Leiter die gesamte Ladung an der Oberfläche sitzt, $\mathbf{E} = 4\pi\sigma\hat{\mathbf{e}}_n$, also $\sigma = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{e}}_n = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\hat{\mathbf{e}}_n$. Für die Ladung der x-z-Ebene folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma(x>0,z)=&-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\left[\Phi_{(a,b,0)}(\mathbf{r})+\Phi_{(-a,-b,0)}(\mathbf{r})+\Phi_{(a,-b,0)}(\mathbf{r})+\Phi_{(-a,b,0)}(\mathbf{r})\right]_{(a,b,0)}\\
=&\frac{Q}{4\pi}\hat{\mathbf{e}}_y\cdot\left[\frac{\mathbf{r}-a\hat{\mathbf{e}}_x-b\hat{\mathbf{e}}_y}{|\mathbf{r}-a\hat{\mathbf{e}}_x-b\hat{\mathbf{e}}_y|^3}+\frac{\mathbf{r}+a\hat{\mathbf{e}}_x+b\hat{\mathbf{e}}_y}{|\mathbf{r}+a\hat{\mathbf{e}}_x+b\hat{\mathbf{e}}_y|^3}-\frac{\mathbf{r}-a\hat{\mathbf{e}}_x+b\hat{\mathbf{e}}_y}{|\mathbf{r}-a\hat{\mathbf{e}}_x+b\hat{\mathbf{e}}_y|^3}\right.\\
&\left.-\frac{\mathbf{r}+a\hat{\mathbf{e}}_x-b\hat{\mathbf{e}}_y}{|\mathbf{r}+a\hat{\mathbf{e}}_x-b\hat{\mathbf{e}}_y|^3}\right]_{y=0}\\
=&\frac{Q}{4\pi}\hat{\mathbf{e}}_y\cdot\left[\frac{(x-a)\hat{\mathbf{e}}_x-b\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z}{|(x-a)\hat{\mathbf{e}}_x-b\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z|^3}+\frac{(x+a)\hat{\mathbf{e}}_x+b\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z}{|(x+a)\hat{\mathbf{e}}_x+b\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z|^3}\right.\\
&\left.-\frac{(x-a)\hat{\mathbf{e}}_x+b\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z}{|(x-a)\hat{\mathbf{e}}_x+b\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z|^3}-\frac{(x+a)\hat{\mathbf{e}}_x-b\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z}{|(x+a)\hat{\mathbf{e}}_x-b\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z|^3}\right]_{y=0}\\
=&-\frac{Qb}{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}^3}-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}^3}\right]
\end{aligned}$$

für die anderen Halbebene mit $\sigma(y>0,z)$ gilt eine analoge Rechnung.

Aufgabe 3 - Energie des elektrischen Feldes

Berechnen Sie die Energie W, welche in dem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ einer homogen geladenen Kugel steckt. Die Kugel habe die Ladung Q und den Radius R.

Lösung:

$$\begin{aligned}
W=&\frac{1}{8\pi}\int d^3r\ |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2\\
\rho=&\frac{Q}{V_{ges}}=\frac{3Q}{4\pi R^3}\\
\int d\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}=&\ 4\pi Q
\end{aligned}$$

außerhalb der Kugel:

$$\begin{aligned}
4\pi r^2\mathbf{E}_{out}(r)=&\ 4\pi Q\\
\mathbf{E}_{out}(r)=&\ \frac{Q}{r^2}\\
W_{out}=&\ \frac{1}{8\pi}\int_R^\infty dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta E_{out}^2(r)r^2\sin\theta=\frac{1}{2}\int_R^\infty\frac{Q^2}{r^2}dr=\frac{Q^2}{2R}
\end{aligned}$$

innerhalb der Kugel:

$$\begin{aligned}4\pi r^2\mathbf{E}_{in}(r) &= 4\pi\rho V\\ \Rightarrow \mathbf{E}_{in}(r) &= Q\frac{r}{R^3}\\ W_{in} &= \frac{1}{8\pi}\int_0^R dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta E_{in}^2(r)r^2\sin\theta = \frac{1}{2}\int_0^R\frac{Q^2r^4}{R^6}dr = \frac{Q^2}{10R}\\ W_{tot} &= W_{in}+W_{out} = \frac{3Q^2}{5R}\end{aligned}$$

Aufgabe 4 - Multipolmomente

Berechnen Sie das Monopolmoment, Dipolmoment und den Quadrupoltensor Q_{ij} der folgenden homogen geladenen Körper:

a) Einem rotationssymmetrischen Ellipsoids mit den Halbachsen $a = b$ und c

b) Einem Zylinder der Länge L und mit dem Radius R

In beiden Fällen ist das Koordinatensystem so zu wählen, dass der Ursprung sich im Zentrum des geladenen Körpers befindet. Die z-Achse zeige in Richtung der Symmetrieachse.

Lösung:

a) Das Monopolmoment ist einfach die Gesamtladung

$$Q = \int_V d^3r\rho(\mathbf{r})$$

Mit der Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{3Q}{4\pi a^2 b}$$

Das Dipolmoment verschwindet, da eine ungerade und eine gerade Funktion miteinander multipliziert werden:

$$\mathbf{d} = \int_V d^3r\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) \propto \int_V d^3r\mathbf{r} = 0$$

Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$

$$Q_{ij} = \rho\int d^3r(3x_ix_j - r^2\delta_{ij} = \rho\int d^3r\begin{pmatrix}2x^2-y^2-z^2 & 3xy & 3xz\\ 3xy & 2y^2-x^2-z^2 & 3yz\\ 3xz & 4yz & 2z^2-y^2-x^2\end{pmatrix}$$

Substitution: $x' = \frac{x}{a} \qquad y' = \frac{y}{a} \qquad z' = \frac{z}{c}$
Ellipsoid ist jetzt eine Einheitskugel.

$$d^3r = dx\ dy\ dz = a^2c\ dx'dy'dz' = a^2c\ d^3r'$$
$$dx'dy'dz' = r^2 \sin\theta\ dr\ d\phi\ d\theta$$
$$x' = r\sin\theta\cos\phi \qquad y' = r\sin\theta\sin\phi \qquad z' = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow Q_{11} = \rho \int d^3r' a^2c(2a^2x'^2 - a^2y'^2 - c^2z'^2) =$$
$$= \rho a^2 c \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta r^2 \sin\theta \left(2a^2r^2\sin^2\theta\cos^2\phi - a^2r^2\sin^2\theta\sin^2\phi - c^2r^2\cos^2\theta\right)$$
$$= \rho a^2 c \frac{1}{5}(-\frac{4}{3}c^2\pi + \frac{4}{3}a^2\pi) = \frac{4}{15}\rho a^2 c\pi(a^2 - c^2)$$
$$Q_{22} = \rho a^2 c \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta r^2 \sin\theta \left(2a^2r^2\sin^2\theta\sin^2\phi - a^2r^2\sin^2\theta\cos^2\phi - c^2r^2\cos^2\theta\right)$$
$$= \frac{4}{15}\rho a^2 c\pi(a^2 - c^2)$$
$$Q_{33} = -Q_{11} - Q_{22} = \frac{8}{15}\rho a^2 c\pi(c^2 - a^2)$$

$$Q_{21} = Q_{12} = \rho a^2 c \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta r^2 \sin\theta \left(3a^2r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi\right) = 0$$
$$Q_{31} = Q_{13} = 0$$
$$Q_{23} = Q_{32} = 0$$

b) Das Monopolmoment ist wieder die Ladung mit der Ladungsdichte:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\pi R^2 L}$$

Für das Dipolmoment gilt das gleiche Argument wie bei dem Ellipsoid. Für das Quadrupolmoment werden Zylinderkoordinaten eingeführt:

$$dxdydz = rdrd\phi dz \qquad x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \qquad z = z$$

$$Q_{11} = \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz r(2r^2\cos^2\phi - r^2\sin^2\phi - z^2) = \rho\pi LR^2\left(\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{12}L^2\right)$$
$Q_{22} = Q_{11}$ wegen Symmetrie
$$Q_{33} = -2Q_{11} = \rho\pi LR^2\left(\frac{1}{6}L^2 - \frac{1}{2}R^2\right)$$
$$Q_{12} = Q_{21} = Q_{31} = Q_{13} = Q_{23} = Q_{32} = 0$$

Aufgabe 5 - Sphärische Multipolmomente

Das Potential einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ kann man mit der Formel aus der Vorlesung nach sphärischen Multipolmomenten q_{lm} entwickeln.

a) Gegeben sei eine sphärische Ladungsverteilung. Zeigen Sie, dass nur der Multipol mit $l = 0$ einen Beitrag liefert und berechnen Sie das Potential.

b) Bestimmen Sie das Potential eines homogen geladenen, unendlich dünnen Kreisrings in der x-y-Ebene mit Radius R und der Gesamtladung Q mittels Multipolentwicklung.

c) Gegeben sei die Ladungsverteilung aus vier Punktladungen $q_1 = q$ bei $r_1 = (a, 0, 0)$, $q_2 = q$ bei $r_2 = (-a, 0, 0)$, $q_3 = -q$ bei $r_3 = (0, a, 0)$ und $q_4 = q$ bei $r_4 = (0, -a, 0)$. Berechnen Sie die Multipolmomente des Systems dieser vier Ladungen allgemein. Für welche Werte von (l, m) verschwinden diese nicht? Berechnen Sie das niedrigste nichtverschwindende Multipolmoment.

Definition der Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi} = N_{lm} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

Lösung:

a) Für dei Dichte gilt $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ und daher folgt für die Multipolmomente:

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \int d^3r\ r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \rho(r) \\ &= \int dr\ r^{l+2} \rho(r) \int \sin(\theta) d\theta \int d\phi Y_{lm}(\theta, \phi) \sqrt{4\pi} Y_{00}^*(\theta, \phi) \\ &= \delta_{l0} \delta_{m0} \sqrt{4\pi} \int dr\ r^{l+2} \rho(r) = \delta_{l0} \delta_{m0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q_{ges} \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Identität $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$, die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen und die Definition der Gesamtladung $Q_{ges} = 4\pi \int dr\ r^2 \rho(r)$ verwendet. Eingesetzt in die Potentialformel ergibt sich das bekannte Ergebnis:

$$\Phi = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} q_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{Q_{ges}}{r}$$

b) In Kugelkoordinaten gilt für die Ladungsdichte des Kreisrings:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi R^2 \sin(\theta)} \delta(r - R) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Für die Multipolmomente ergibt sich:

$$\begin{aligned}
q_{lm} &= \frac{Q}{2\pi} R^l \int d\theta\ d\phi\ \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) Y^*_{lm}(\theta, \phi) \\
&= \frac{Q}{2\pi} R^l \int d\theta\ d\phi\ \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) N_{lm} P_l^m(cos(\theta)) e^{\mathrm{i}m\phi} \\
&= \frac{Q}{2\pi} R^l N_{l0} 2\pi \delta_{m0} P_l^0(0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Q R^l \delta_{m0} P_l^0(0)
\end{aligned}$$

hier wurde die Definition der Kugelflächenfunktionen verwendet. Außerdem die Gleichung $\int d\phi e^{\mathrm{i}m\phi} = 2\pi\delta_{m0}$ und, dass gilt $P_l^0(0) = 0$ für alle ungeraden l, somit

$$q_{lm} = q_{2n,0} = \sqrt{\frac{4n+1}{4\pi}} Q R^{2n} P_{2n}^0(0), \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0$$

Eingesetzt in die Potentialformel folgt:

$$\Phi = \sum_n \frac{1}{r^{2n+1}} Q R^{2n} P_{2n}^0(0) P_{2n}^0(\cos(\theta))$$

hier wurde wieder die Definition der Kugelflächenfunktionen verwendet.

c) Die Dichte besitzt nun folgenden Ausdruck in Kugelkoordinaten:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{a^2 \sin(\theta)} \delta(r-a) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \left[\delta(\phi) + \delta(\phi - \pi) - \delta\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(\phi - \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

Die Multipolmomente sind:

$$\begin{aligned}
q_{lm} &= a^l q \left[Y_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + Y_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) - Y_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - Y_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right] \\
&= a^l q N_{lm} P_l^m(0) \left(1 + e^{\mathrm{i}m\pi} - e^{\mathrm{i}m\frac{\pi}{2}} - e^{\mathrm{i}m\frac{3\pi}{2}}\right) \\
&= a^l q N_{lm} P_l^m(0)(1 + e^{\mathrm{i}m\pi})(1 - e^{\mathrm{i}m\frac{\pi}{2}})
\end{aligned}$$

Die Multipolmomente verschwinden, wenn eine der beiden runden Klammern identisch Null ist/sind.
Somit:

- $1 + e^{\mathrm{i}m\pi} = 0$, d.h. $\pm m \in \{1, 3, 5, ...\} = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}_0\}$,
- $1 - e^{\mathrm{i}m\frac{\pi}{2}} = 0$, d.h. $\pm m \in \{, 4, 8, ...\} = \{4n | n \in \mathbb{N}_0\}$.

Nicht verschwindende Momente existieren also für $\pm m \in \{2, 6, 10, ...\} = \{4n+2 | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Das niedrigste Moment besitzt $\pm m = 2$, daher scheiden $l = 0$ und $l = 1$ aus.