Ferienkurs Experimentalphysik 3

Übungsblatt 1

1 Wellengleichung für das magnetische Feld

Aus $\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ folgt durch Bildung der Rotation:

$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{E} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$

$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{B} \right) - \nabla \cdot \left(\nabla \vec{B} \right) = -\Delta \vec{B}$ weil $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Es folgt

$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$

2 Wellengleichung für das magnetische Feld 2

a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \frac{k}{\omega} (\hat{e}_z \times \mathbf{E}) \\
&= E_0 \frac{k}{\omega} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} cos(kz - \omega t) \\ sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= c_0 E_0 \begin{pmatrix} -sin(kz - \omega t) \\ cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\
&= \frac{e \cdot E_0^2}{\mu_0} \begin{pmatrix} cos(kz - \omega t) \\ sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -sin(kz - \omega t) \\ cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= c_0^2 \epsilon_0 E_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cos^2(kz - \omega t) + sin^2(kz - \omega t) \end{pmatrix} \\
&= c_0^2 \epsilon_0 E_0^2 \hat{e}_z
\end{aligned} \tag{2}$$

→ Energiestromdichte einer zirkular polarisierten Welle oszilliert nicht!

c)

$$P_s = \frac{I_\perp}{c_0} = \frac{1}{c_0} < |\mathbf{S}_\perp| >= \mathrm{c_0 \epsilon_0 E_{0,\perp}^2} \tag{3}$$

$\vec{k}$ fällt im Winkel $90° - \alpha$ auf die absorbierende Wand ein, $\mathbf{E} \perp \vec{k}$

$$E_{0,\perp} = E_0 cos(\alpha) \rightarrow \quad P_S = c_0 \epsilon_0 E_0^2 cos^2(\alpha) \tag{4}$$

3 Fourier-Transformation

a) $E(\omega) = E_0 \delta(\omega - \omega_0)$

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E_0 \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{i\omega_0 t} \tag{5}$$

b) $E(\omega) = E_0 e^{-\alpha|\omega|}$

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E_0 e^{-\alpha|\omega|} e^{i\omega t} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^\infty d\omega E_0 e^{-\alpha\omega} e^{-i\omega t} + \int_0^\infty d\omega E_0 e^{-\alpha\omega} e^{i\omega t} \right) \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha + it} + \frac{1}{\alpha - it} \right) \\ &= \frac{2E_0\alpha}{\alpha^2 + t^2} \end{aligned} \tag{6}$$

4 Wellenpakete

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \tag{7}$$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{d\omega}{dk} \frac{dk}{dk_z} = c_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \cdot 2k_z = c_0^2 \frac{k_z}{\omega} = \frac{c_0^2}{v_{ph}} \tag{8}$$

$$\rightarrow \quad v_{ph} = \frac{c_0^2}{v_{gr}} = 3c_0 \tag{9}$$

$$v_{gr} = \frac{1}{3} c_0 = c_0 \frac{k_z}{k_x^2 + k_z^2} \frac{8}{9} k_z^2 = \frac{1}{9} k_x^2 \tag{10}$$

$$k_z = \sqrt{\frac{1}{8}} k_x \tag{11}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{k_x} \sqrt{8} = \frac{2a}{n} \sqrt{8}, \quad n = 1, 2, 3... \tag{12}$$

5 Polarisation

Die Darstellung einer zirkular polarisierten Welle ist:
$\vec{E} = \vec{A} e^{i(\omega t - kz)}$ mit $\vec{A} = A_0(\hat{x} \pm i\hat{y})$
σ^+-Licht: $\vec{A} = \vec{A} = A_0(\hat{x} + i\hat{y})$
σ^--Licht: $\vec{A} = \vec{A} = A_0(\hat{x} - i\hat{y})$
$\vec{E^+} + \vec{E^-} = 2A_0 \hat{x} e^{i(\omega t - kz)}$

6 Schwimmen

$$v_{Tarzan,\ Strand} = 12m/s > v_{Tarzan,\ Wasser} = 3m/s$$

also fallen alle Wege raus, wo $r_{Wasser} \geq r_{Strand}$ ist, sonst verliert Tarzan Zeit (Wege A, B, und C). Um zwischen Weg D und E zu entscheiden, kann man sich über, wie sich ein Lichtstrahl hier bewegen würde von ein optisch dünnes hinein in ein optisch dickeres Medium. Das Verhältnis der „Brechungsindizes“

$$\frac{n_{Wasser}}{n_{Strand}} = \frac{v_{Wasser}}{v_{Strand}} = \frac{1}{4} = \frac{sin\theta_{Strand}}{sin\theta_{Wasser}}$$

Dieser Bedingung am ähnlichsten sieht der Weg D aus, auf diesem sollte Tarzan am schnellst zu Jane kommen...

7 Plexiglas in Alkohol

a) Damit am Punkt P Totalreflexion stattfindet, muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$sin\theta_2 = \frac{n_{Alkohol}}{n_{Plexiglas}} \quad \rightarrow \theta_2 = 65,89^\circ \tag{13}$$

Aus der Dreieckssumme folgt:

$$\theta_1 = 90^\circ - \theta_2 = 24,11^\circ \tag{14}$$

Damit ergibt sich mit Snellius der Einfallswinkel θ:

$$sin\theta = n_{Plexiglas} sin\theta_1 \quad \rightarrow \theta \approx 37,5^\circ \tag{15}$$

b) Der kritische Winkel, ab den an der Grenzfläche Plexiglas/Alkohol Totalreflektion stattfindet, wurde in a) bereits bestimmt. Der kritische Winkel für den Übergang von Plexiglas/Luft berechnet sich zu:

$$sin\theta_b = \frac{1}{n_{Plexiglas}} \quad \rightarrow \theta_b = 42,2^\circ \tag{16}$$

8 Glasfaser

Im Faserkern ist der Grnezwinkel für die Totalreflektion

$$\theta_{TR} = arcsin\left(\frac{n_M}{n_K}\right) = 83,63^\circ$$

Zum Lot auf der Stirnfläche entspricht dies $90^\circ - \theta_{TR} = 6,37^\circ$. Dieser Winkel wird für alle Lichtstrahlen die steiler als

$$\alpha_{max} = arcsin(sin(6,37^\circ) \cdot n_K) = 9,30^\circ$$

einfallen, unterschritten.

9 Doppelbrechung

$$n_x = 1 - \frac{\alpha}{\omega - \omega_0 + \Delta}, \;\; n_y = 1 - \frac{\alpha}{\omega - \omega_0 - \Delta} \tag{17}$$

Berechnung der Phasendifferenz:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_{y-x} &= kd(n_x - n_y) \\
&= kd\left(\frac{\alpha}{\omega - \omega_0 + \Delta} - \frac{\alpha}{\omega - \omega_0 - \Delta}\right) \quad |\omega = omega_0 + \delta \\
&= kd\left(\frac{\alpha}{\delta + \Delta} - \frac{\alpha}{\delta - \Delta}\right) \\
&= \frac{kd\alpha \cdot 2\Delta}{\delta^2 + \Delta^2} = \begin{cases} -\frac{pi}{2} + 2\pi n, & \text{rechtszirkular} \\ \frac{pi}{2} + 2\pi n, & \text{linkszirkular} \end{cases}
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\rightarrow \;\; \delta = \pm\sqrt{\Delta^2 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta}{(2n \mp \frac{1}{2})\pi}} \tag{19}$$