# Ferienkurs Experimentalphysik 1
# 2012

## Übung 3 - Musterlösung

**1. Schwimmender Quader** (**)

Betrachten Sie einen schwimmenden Körper in Form eines flachen Quaders mit Höhe $c$ und quadratischer Grundfläche der Kantenlänge $a$, der aus einem Material homogener Dichte besteht.

a) Zeigen Sie, dass sich die untergetauchte Höhe zur Gesamthöhe des Quaders so verhält, wie die Dichte seines Materials zur Dichte von Wasser.

b) Der schwimmende Körper befinde sich nun in einem Wasserbecken der Fläche $A$ mit der Wassertiefe $h_0$. Zeigen Sie, dass die Eintauchtiefe im Gleichgewicht die potentielle Energie des Gesamtsystems aus Körper und Wasser minimiert.

**Lösung:**

a) Nach dem Auftriebsgesetz taucht der Körper so weit ein, bis das Gewicht des verdrängten Wassers seinem eigenen Gewicht gleicht. Für die Eintauchtiefe $h_-$ gilt also

$$\rho_\mathrm{W} a^2 h_- = \rho_\mathrm{Q} a^2 c$$

und somit

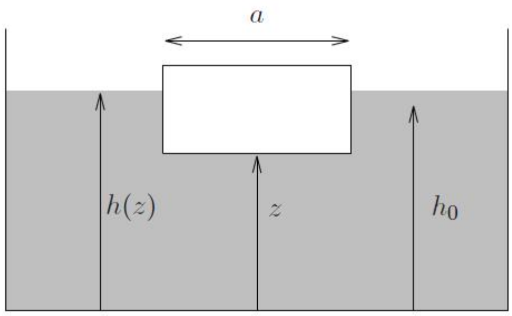
$$\underline{\underline{\frac{h_-}{c} = \frac{\rho_\mathrm{Q}}{\rho_\mathrm{W}}}}.$$

b) Die Höhe der Unterseite des Quaders über dem Beckenboden sei $z$. Dann ist die Höhe des Wasserspiegels im Becken als Funktion von $z \leq h_0$ gegeben durch die Bedingung, dass das Gesamtvolumen des Wassers im Becken konstant, d.h. unabhängig von $z$ ist

$$a^2 z + (A - a^2) h(z) = A h_0.$$

Also gilt

$$h(z) = \frac{A h_0 - a^2 z}{A - a^2}.$$




Die potentielle Energie des Quaders als Funktion von $z$ ist gegeben durch die Höhe seines Schwerpunkts

$$V_{\mathrm{Q}}(z) = \rho_{\mathrm{Q}} a^2 c g \left( z + \frac{c}{2} \right).$$

Die potentielle Energie des Wassers setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Das Wasser unterhalb des Quaders und das Wasser im Rest des Beckens

$$V_{\mathrm{W}}(z) = \frac{1}{2} g \rho_{\mathrm{W}} a^2 z^2 + \frac{1}{2} g \rho_{\mathrm{W}} (A - a^2) h^2(z).$$

Die gesamte potentielle Energie von Quader und Wasser ist also

$$V(z) = \frac{1}{2} g \rho_{\mathrm{W}} a^2 z^2 + \frac{1}{2} g \rho_{\mathrm{W}} \frac{(A h_0 - a^2 z)^2}{A - a^2} + \rho_{\mathrm{Q}} a^2 c g \left( z + \frac{c}{2} \right).$$

Die Ableitung nach $z$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = g \rho_{\mathrm{W}} a^2 z - g \rho_{\mathrm{W}} a^2 \frac{A h_0 - a^2 z}{A - a^2} + g \rho_{\mathrm{Q}} a^2 c \overset{!}{=} 0.$$

In dem Bruch erkennt man die Höhe des Wasserspiegels $h(z)$ wieder, also folgt nach Division durch $g \rho_W a^2$

$$h(z) - z = \frac{\rho_{\mathrm{Q}}}{\rho_{\mathrm{W}}} c.$$

Die Eintauchtiefe $h_-(z) = h(z) - z$ zu minimaler Gesamtenergie ist also genau durch die in a) gefundene Gleichung

$$\underline{\underline{\frac{h_-}{c} = \frac{\rho_{\mathrm{Q}}}{\rho_{\mathrm{W}}}}}$$

gegeben, also durch das Auftriebsgesetz.

**2. Oberflächenspannung** (**)

a) Zwei Glasplatten werden in einem Abstand $d = 0.1$ mm zueinander justiert und anschließend mit einer offenen Seite in Wasser getaucht. Wie hoch steigt das Wasser, wenn Sie davon ausgehen, dass Wasser eine Oberflächenspannung von $\Delta\sigma = 72.75 \cdot 10^{-3}$ J/m$^2$ ($\Delta\sigma = \sigma_{\text{Luft-Wand}} - \sigma_{\text{Wasser-Wand}}$) besitzt und außerdem Randeffekte vernachlässigen?

Hinweis: Bedenken Sie, dass die Gesamtenergie des Systems minimal sein muss.

b) Eine Seifenblase zerplatze in Tröpfchen. Um die Geschwindigkeit der Tröpfchen grob abzuschätzen, nehme man an, dass Tröpfchen mit gleicher Geschwindigkeit entstehen. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Tröpfchen, wenn die Seifenblase einen Radius von 6 cm und eine Masse von 0,1 g hat? Der Vorgang des Zerplatzens gehe ohne Verluste durch Reibung vonstatten und die Oberflächenspannung der entstehenden Tröpfchen selbst kann vernachlässigt werden. Die Seifenlösung habe die Oberflächenspannung $\sigma = 0.02$ N/m.

**Lösung:**

a) Lösung über Minimierung der Gesamtenergie des Systems als Funktion der Steighöhe $h$

$$V_{\mathrm{W}}(h) = \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2}\rho g d l h^2$$

($l$ ist die „Tiefe“ der Platten) und

$$V_{\mathrm{O}}(h) = -2\Delta\sigma \cdot hl.$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, dass Energie frei wird, wenn das Wasser höher steigt und eine größere Oberfläche benetzt, also nimmt $V_{\mathrm{O}}$ für größere $h$ ab. Insgesamt gilt

$$V(h) = \frac{1}{2}\rho g d l h^2 - 2\Delta\sigma \cdot hl$$

und somit

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \rho g d l h - 2\Delta\sigma \cdot l \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies führt auf die Steighöhe, die die Gesamtenergie minimiert

$$\underline{\underline{h = \frac{2\Delta\sigma}{\rho g d} \approx 14.8 \text{ cm.}}}$$

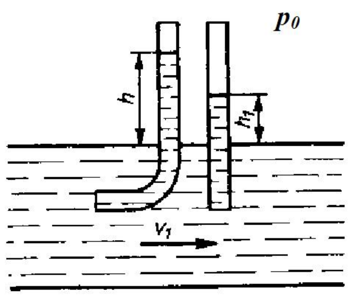
b) Die Oberflächenenergie der Seifenblase ist $E = 2A\sigma$ (Faktor 2 wegen innerer und äußerer Grenzfläche Luft-Seife). Diese verteile sich nun als kinetische Energie vollständig (da die Oberflächenenergie der Tröpfchen vernachlässigt werden soll) auf $N$ Tröpfchen mit den Massen $m_n$ und gleichen Geschwindigkeiten $v$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_{n=1}^{N} m_n = \frac{1}{2} M v^2 = 2A\sigma.$$

Die Unbekannten $m_n$ und $N$ fallen also raus und es bleibt übrig:

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{4A\sigma}{M}} = \sqrt{\frac{16\pi r^2 \sigma}{M}} = 6.016\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}}$$

**3. Dynamischer Druck** (*)




Zur Messung des dynamischen Drucks wird ein rechtwinklig gebogenes und ein gerades Rohr in strömendes Wasser getaucht (s. Abbildung).

a) Wie hoch steigt die Flüssigkeit in diesem gekrümmten Rohr auf, wenn sie in einem an gleicher Stelle eingetauchten geraden Rohr eine Steighöhe $h_1 = 10$ cm erreicht und wenn die Strömungsgeschwindigkeit an der gegebenen Stelle gleich $v_1 = 1.4$ m/s ist? Wie groß ist demnach der dynamische Druck im Wasser?

b) Geben Sie den statischen und den Gesamtdruck im Wasser an, wenn der Umgebungsdruck $p_0 = 1013$ mbar ist.

**Lösung:**

a) Mit der Bernoulli Gleichung gilt für das gekrümmte Rohr

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h + p_0.$$

Im geraden Rohr gilt

$$p_1 = \rho g h_1 + p_0.$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander, so kann man die gesuchte Höhe $h$ berechnen

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g (h - h_1) \ \Rightarrow \ h = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = 20.0 \text{ cm}$$

Der Dynamische Druck ist

$$\underline{\underline{p_{\text{dyn}} = \frac{1}{2}\rho v_1^2 = 980 \text{ Pa.}}}$$

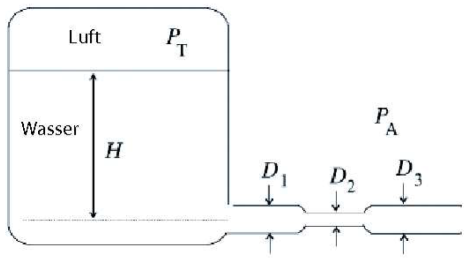
b) Der statische Druck ist

$$\underline{\underline{p_{\text{stat}} = \rho g h_1 + p_0 = 1.023 \cdot 10^5 \text{ Pa.}}}$$

Der Gesamtdruck

$$\underline{\underline{p_{\text{ges}} = p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}} = 1.033 \cdot 10^5 \text{ Pa.}}}$$

**4. Wasserbehälter** (**)




In der gezeigten Anordnung herrscht der konstante Druck $p_T$ im geschlossenen Teil des Gefäßes über der Flüssigkeit. Das Gefäß wird von Luft bei Normaldruck $p_A$ umgeben. Die Schwerkraft wirke in vertikaler Richtung. Das Strömungsverhalten sei charakteristisch für eine ideale Flüssigkeit.

a) Wie groß muss der Druck $p_T$ mindestens sein, damit die Flüssigkeit ausläuft? (Gehen Sie von der einfachst möglichen Annahme über das Verhalten der Flüssigkeit am Ausfluss aus.)

b) Wenn der Druck in einer strömenden Flüssigkeit unter den Dampfdruck $p_D$ fällt, kommt es zur Bildung von Blasen. Diskutieren Sie unter Angabe der relevanten Gleichungen, wo und für welche Werte von $p_T > p_D$ es im gezeigten System beim Auslaufen zuerst zu einer Blasenbildung kommt. (Die Geschwindigkeit des Wassers im Behälter selbst sei vernachlässigbar.)

**Lösung:**

a) Die einfachste Annahme bedeutet, dass man sich keine Gedanken über rausschwappendes Wasser, reingezogene Blasen etc. machen soll, sondern das ganze so betrachten, als wäre das Ausflussrohr sauber mit einem beweglichen Kolben verschlossen, der mit dem Atmosphärendruck $p_A$ dem Ausfließen entgegensteht. Dann kann man für den Druck auf der Höhe des Ausflussrohres einfach hinschreiben

$$p = p_T + \rho g H$$

und die Bedingung für Auslaufen ist $p > p_A$, also

$$\underline{\underline{p_T > p_A - \rho g H.}}$$

b) An einem allgemeinen Punkt im Ausflussrohr gilt die Bernoulli-Formel

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_T + \rho g H$$

(auf der rechten Seite taucht keine Geschwindigkeit auf, da die Geschwindigkeit des Wassers im Behälter vernachlässigt werden soll) also ist der Druck

$$p = p_T + \rho g H - \frac{1}{2}\rho v^2$$

also dort klein, wo die Geschwindigkeit groß ist. Zur Blasenbildung kommt es an der Stelle mit dem niedrigsten Druck, also an der Stelle mit der höchsten Geschwindigkeit. Nun gilt die Kontinuitätsgleichung

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3 \implies D_1^2 v_1 = D_2^2 v_2 = D_3^2 v_3.$$

Daher ist

$$v_1 = v_3, \qquad v_2 = \frac{D_3^2}{D_2^2} v_3 > v_3,$$

d.h. die Geschwindigkeit ist bei 2 am größten, der Druck dort am kleinsten, also entstehen dort die Blasen. (Die Zusatzbedingung $p_T > p_D$ soll verhindern, dass als Antwort kommt: Blasenbildung findet am Wasserspiegel statt, wenn $p_T < p_D$ ist.)

Um den kritischen Wert für den treibenden Druck $p_T$ zu bestimmen, berechnet man zuerst die Austrittsgeschwindigkeit $v_3$ mit Bernoulli:

$$p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 = p_T + \rho g H,$$

wobei wegen der einfachst möglichen Annahme $p_3$ gleich dem Außendruck $p_A$ ist. Also

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_T + \rho g H - p_A)}.$$

Daraus bekommt man mit Kontinuitätsgleichung $v_2$:

$$v_2 = \frac{D_3^2}{D_2^2} v_3$$

und daraus mit Bernoulli den Druck bei 2:

$$p_2 = p_T + \rho g H - \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Dieser soll nun kleiner gleich $p_D$ sein. Alles eingesetzt führt diese Bedingung auf

$$p_T + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \frac{D_3^4}{D_2^4}\frac{2}{\rho}(p_T + \rho g H - p_A) \leq p_D$$

was durch korrektes Auflösen nach $p_T$ ergibt:

$$\underline{\underline{p_T \geq \frac{D_3^4 p_A - D_2^4 p_D}{D_3^4 - D_2^4} - \rho g H.}}$$

**5. Trichter** (***)

Aus einem bis zur Höhe $H$ mit Wasser gefüllten Trichter mit dem vollen Öffnungswinkel $\alpha = 60°$ strömt Wasser durch ein waagerechtes Rohr mit Innendurchmesser $d$ und Länge $L$ in ein Vorratsgefäß.

a) Wie sieht die Höhe $H(t)$ des Wasserspiegels im Trichter als Funktion der Zeit aus? Hinweis: Reibungseffekte im Rohr sind hier <u>nicht</u> vernachlässigbar!

b) Wie ist die Wasserdurchflussmenge $M(t)$?

c) Nach welcher Zeit $T$ ist alles Wasser ausgeflossen, wenn $H = 30$ cm, $d = 0.5$ cm und $L = 20$ cm ist? Die Zähigkeit beträgt $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ Pas, die Dichte $\rho = 1000$ kg/m$^3$.

d) Wie ändert sich die Füllzeit für ein 4-Liter Gefäß, wenn man den Trichter mit $V = 4$ l durch Nachgießen immer voll hält?

**Lösung:**

Der Trichter sei bis zur Höhe $H$ gefüllt, sodass der Radius $R$ der kreisförmigen Wasseroberfläche $R = H\tan(\alpha/2)$ ist. Das Wasservolumen ist dann

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi H^3 \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{9}\pi H^3.$$

a) Die Abnahme des Wasservolumens pro Zeiteinheit ist

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\pi H^2 \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}.$$

Andererseits gilt nach Hagen-Poiseuille

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta p,$$

wobei $\Delta p = \rho g H$ ist. Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\frac{3}{8}\frac{r^4 \rho g}{\eta L}}_{=:a}\frac{1}{H} \Rightarrow H\mathrm{d}H = -a\mathrm{d}t$$

mit $a \approx 7.2 \cdot 10^{-4}$ m$^2$s$^2$. Integration liefert

$$H^2 - H_0^2 = -2at \quad \text{mit} \quad H_0 = H(t = 0).$$

Daraus folgt für die Höhe des Wasserspiegels

$$\underline{\underline{H(t) = \sqrt{H_0^2 - 2at}.}}$$

b) Die Wasserdurchflussmenge ist über $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = \rho\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ mit dem Volumenstrom verbunden. Er ergibt sich also aus Integration der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}\pi a H \rho = -\frac{1}{3}\pi a \rho \sqrt{H_0^2 - 2at}$$

die Wasserdurchflussmenge

$$\underline{\underline{M(t) = \frac{1}{9}\pi\rho(H_0^2 - 2at)^{3/2}.}}$$

c) Die Zeit bis alles Wasser ausgeflossen ist (d.h. $H = 0$) ist $T = H_0^2/(2a)$. Mit $H_0 = 0.3$ m, $r = 2.5 \cdot 10^{-3}$ m, $L = 0.2$ m, $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ Pas ist $T = 62.6$ s.

d) Für eine Füllmenge von 4 l wird $H_0 = (9V/\pi)^{1/3} = 0.225$ m. Ohne Nachfüllen des Trichters und mit $a = 7.2 \cdot 10^{-4}$ m$^2$/s$^2$ ist dann die Füllzeit $T = 35$ s. Mit Nachfüllen gilt $H = H_0 = \text{const}$. Die Menge, die in der Zeit $t$ in das 4-Liter-Gefäß fließt ist dann

$$V = \frac{1}{3}\pi a H_0 t$$

und daraus $t = 23.6$ s.

### 6. Fass mit Glyzerin (**)

Ein Fass (Durchmesser $d = 1$ m) ist mit Glyzerin ($\rho_{\mathrm{Gl}} = 1.26 \cdot 10^3$ kg/m$^3$) bis zum oberen Rand gefüllt. Auf Höhe des Fassbodens ragt ein horizontales Rohr der Länge $L = 70$ cm mit Innendurchmesser $d_{\mathrm{Rohr}} = 1$ cm.

a) Zu Beginn sei das Rohr verschlossen. Zur Bestimmung der Viskosität $\eta$ des Glyzerins wird die Gleichgewichts-Sinkgeschwindigkeit einer Stahlkugel mit $v = 9$ cm/s gemessen (Radius $r_{\text{Kugel}} = 6$ mm, Dichte $\rho_{\text{Kugel}} = 7.8 \cdot 10^3$ kg/m$^3$). Berechnen Sie $\eta$.

b) Nach dem Öffnen des Rohrs werde der Pegel des Glyzerins durch ständiges Zufüllen von $I = 3.7$ cm$^3$/s (Flüssigkeitsstrom) konstant gehalten. Berechnen Sie unter Annahme laminarer Strömung im Rohr die Höhe $h$ des Fasses.

c) Wie groß ist die mittlere Glyzeringeschwindigkeit im Rohr?

d) Die Zufuhr von Glyzerin werde gestoppt. Nach welche Zeit ist das Fass halb leer?

**Lösung:**

a) Bei Stokesscher Reibung ist das Kräftegleichgewicht gegeben durch

$$(\rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Gl}}) V_{\text{Kugel}} g = 6\pi\eta r_{\text{Kugel}} v.$$

Damit ist die Viskosität $\eta$ von Glyzerin

$$\underline{\underline{\eta = \frac{2r_{\text{Kugel}}^2 g}{9v}(\rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Gl}}) = 0.357 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}}}$$

b) Der Strom im Rohr wird durch das Hagen-Poiseullische Gesetz beschrieben

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi r^4}\dot{V} = \frac{8\eta L}{\pi r^4} I$$

Der Druckunterschied ist durch $\Delta p = \rho_{\text{Gl}} g h$ gegeben. Die Höhe $h$ des Fasses beträgt also

$$\underline{\underline{h = \frac{8\eta L}{\rho_{\text{Gl}} g \pi r^4} I = 0.304 \text{ m}.}}$$

c) Die mittlere Glyzeringeschwindigkeit im Rohr ist

$$\underline{\underline{\bar{v} = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi r^2} = 4.71 \text{ cm/s}.}}$$

d) Der Flüssigkeitsstrom im Rohr wird beschrieben durch

$$I(t) = \frac{h(t)\rho_{\text{Gl}} g \pi r^2}{8\eta L}.$$

Dieser muss gleich dem Flüssigkeitsstrom im Fass sein $I_{\text{Rohr}} = I_{\text{Fass}} = -\mathrm{d}h/\mathrm{d}t A_{\text{Fass}}$. Daraus ergibt sich eine DGL für die Höhe $h$ des Flüssigkeitsspiegels

$$\dot{h}(t) = -\frac{\rho_{\text{Gl}} g \pi r^4}{8A_{\text{Fass}}\eta L} h(t).$$

Ihre Lösung ist

$$h(t) = h_0 \exp\left(-\frac{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4}{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L} \cdot t\right),$$

wobei $h_0 = h(0) = 0.304$ m ist. Das Fass ist also halbleer wenn gilt

$$\frac{h_0}{2} = h_0 \exp\left(-\frac{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4}{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L} \cdot T_{1/2}\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{T_{1/2} = \ln 2 \cdot \frac{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L}{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4} = 44781 \text{ s.}}}$$

**7. Ballon** (*)

Ein Heißluftballon mit Volumen $V_0 = 3000 \text{ m}^3$ befindet sich auf der Erdoberfläche (Druck $p_0 = 1000$ hPa, Dichte $\varrho_0 = 1.293 \text{ kgm}^{-3}$, Temperatur $T = 0$ °C überall konstant).

a) Berechnen Sie den Luftdruck und die Luftdichte in 600 m Höhe.

b) Berechnen Sie die Auftriebskraft des Ballons auf der Erdoberfläche und in 600 m Höhe.

c) Welche Masse dürfen Ballonhülle, -korb und die Last zusammen höchstens haben um auf eine Höhe von 600 m zu gelangen?

**Lösung:**

a) Mit Hilfe der barometrischen Höhenformel aus der Vorlesung

$$p(z) = p_0 \mathrm{e}^{-gz\varrho_0/p_0}$$

erhält man für den Luftdruck in 600 m Höhe

$$\underline{\underline{p(z = 600 \text{ m}) = 926.72 \text{ hPa.}}}$$

Die Dichte der Luft erhält man auch aus der barometrischen Höhenformel. Wegen $p/\varrho = p_0/\varrho_0 = \text{const.}$ folgt

$$\varrho(z) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-gz\varrho_0/p_0}.$$

Für die Luftdichte in 600 m Höhe erhält man damit

$$\underline{\underline{\varrho(z = 600 \text{ m}) = 1.198 \text{ kgm}^{-3}}}.$$

b) Die Auftriebskraft entspricht der durch den Ballon verdrängten Luftmasse. Am Boden ergibt sich also

$$\underline{\underline{F_{\mathrm{A}}(z = 0 \text{ m}) = \varrho_0 V_0 g = 38.1 \text{ kN}}}$$

und in einer Höhe von 600 m

$$\underline{\underline{F_\mathrm{A}(z = 600\ \mathrm{m}) = \varrho(z = 600\ \mathrm{m})V_0 g = 35.3\ \mathrm{kN}.}}$$

c) Wenn der Ballon gerade noch auf eine Höhe von 600 m aufsteigen soll, müssen sich Auftriebs- und Gewichtskraft in dieser Höhe gerade kompensieren. Die maximale Last ist dann gegeben durch

$$\underline{\underline{m_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{A}(z = 600\ \mathrm{m})}{g} = \varrho(z = 600\ \mathrm{m})V_0 = 3.6\ \mathrm{t}.}}$$

**8. Stickstoffmoleküle** (*)

a) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit eines Stickstoffmoleküls in einem Gas bei $T = 25°\mathrm{C}$ mithilfe der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung.

b) Wie groß ist die Anzahl $N$ der Stickstoffmoleküle in einem Volumen von 1 $\mathrm{m}^3$ bei einem Druck von 1000 hPa und welcher Stoffmenge entspricht das?

**Lösung:**

a) Die Stickstoffatome im $N_2$-Molekül bestehen aus 14 Nukleonen. Die Masse des Stickstoffmoleküls ist somit durch $m = 2 \cdot 14$ u gegeben. Aus der Vorlesung erhalten wir die Formel für die mittlere Geschwindigkeit

$$\underline{\underline{\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T}{\pi m}} = 474.82\ \mathrm{m/s}.}}$$

b) Aus der idealen Gasgleichung

$$pV = Nk_\mathrm{B}T$$

erhält man für die Anzahl der Stickstoffmoleküle

$$\underline{\underline{N = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = 2.43 \cdot 10^{25}.}}$$

Dies entspricht einer Stoffmenge von

$$\underline{\underline{n = \frac{N}{N_\mathrm{A}} = 40.34\ \mathrm{mol} \approx \frac{V}{V_\mathrm{mol}}.}}$$

Da hier nicht mit Standardbedingungen gerechnet wurde, erhält man für die Rechnung mit dem molaren Volumen einen 'leicht' abweichenden Wert.

**9. Zeitdilatation** (*)

Myonen sind Elementarteilchen, welche im Mittel nach $\tau = 2.2$ µs zerfallen. In einem Teilchenbeschleuniger der Länge 3 km hat man Myonen auf fast Lichtgeschwindigkeit beschleunigt.

a) Wenn man klassisch rechnet, welche Strecke legt ein Myon im Mittel während seiner Lebenszeit zurück?

b) Nun möchte man den Myonenstrahl aber gerne über möglichst die gesamte Länge des Beschleunigers schicken, und in der Tat kann man das auch. Erklären Sie diesen Sachverhalt. Welche Strecke kann ein Myon im Mittel zurücklegen, wenn seine Geschwindigkeit 99% der Lichtgeschwindigkeit beträgt?

c) In seinem eigenen Bezugssystem lebt das Myon jedoch nur 2.2 µs. Warum muss das Myon jetzt nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit fliegen?

**Lösung:**

a) Die maximale Geschwindigkeit des Myons ist $v \approx c$. Klassisch ist die Strecke also

$$\underline{\underline{l = c\tau = 660 \text{ m}}}.$$

b) Die angegebene Lebenszeit ist natürlich die im Bezugssystem des Myons. Die Zeitdilatation lässt diese für einen relativ dazu bewegten Beobachter, wie z. B. einen Versuchsaufbau am Teilchenbeschleuniger, um den Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.99^2}} = 7.09$$

länger erscheinen. Die innerhalb des Beschleunigers zurücklegbare Strecke ist also

$$\underline{\underline{\gamma \cdot 660 \text{ m} = 4679 \text{ m}}}.$$

c) Das Myon lebt in seinem eigenen Bezugssystem immer noch die Zeit von 2.2 µs. Der Teilchenbeschleuniger erscheint ihm aber entlang der Bewegungsrichtung gestaucht (Längenkontraktion), und zwar um den selben Faktor wie die Lebensdauer im Beschleunigersystem gestreckt ist.

**10. Anruf von Erde** (***)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ startet von der Erde (Bezugssystem $S$, Ort $x = 0$) ein Raumschiff (Bezugssystem $S'$, Ort $x' = 0$) mit der der Geschwindigkeit $v$ in $x$-Richtung. Die Erde funkt zum Zeitpunkt $\tau = 1$ d die Nachricht 'Alles klar?'. Das Raumschiff hat einen Empfänger für dieses Signal dabei.

a) Zeigen Sie: Wenn der Funkspruch empfangen wird, hat das Raumschiff bezüglich $S$ den Ort $x = \frac{v\tau}{1-v/c}$ und die Uhr von $S$ zeigt die Zeit $t = \frac{\tau}{1-v/c}$.

b) Benutzen Sie das Ergebnis von a) um die Ankunftszeit des Funkspruches bezüglich $S'$ zu berechnen.

**Lösung:**

a) Dies kann man einfach mit der Bewegung lösen: Im System $S$ hat das Raumschiff den Ort

$$x = vt.$$

Damit der Funkspruch auf den Empfänger trifft, muss gelten, dass

$$x = ct - c\tau.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke gleich und löst nach $t$ auf erhält man

$$\underline{\underline{t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{5}{2}\text{ d}}}$$

bzw. mit der ersten Gleichung

$$\underline{\underline{x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} = 3888 \cdot 10^{10}\text{ m.}}}$$

b) Die Ankunftszeit $t'$ ist gemäß der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\
&= \gamma\left(\frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{v^2\tau}{c^2\left(1 - \frac{v}{c}\right)}\right) \\
&= \gamma\tau\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}} \\
&= \gamma\tau\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{5}{4}\frac{8}{5}\tau = \underline{\underline{2\tau = 2\text{ d}}}.
\end{aligned}$$

**11. Erde, Rakete, Meteor** (*)

Die Erde, eine bemannte Rakete und ein Meteor bewegen sich zufällig in die gleiche Richtung. An der Erde fliegt die Rakete mit einer von der Erde beobachteten Geschwindigkeit von $v_{\mathrm{E,R}} = \frac{3}{4}c$ vorbei. An der Rakete fliegt der Meteor mit einer von der Raketenmannschaft beobachteten Geschwindigkeit von $v_{\mathrm{R,M}} = \frac{1}{2}c$ vorbei.

a) Welche Geschwindigkeit hat der Meteor von der Erde aus beobachtet?

b) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm für diese Situation aus der Sicht der Raketenbesatzung.

**Lösung:**

a) Die Geschwindigkeiten $v_{\mathrm{E,R}}$ und $v_{\mathrm{R,M}}$ müssen (relativistisch) addiert werden, da die jeweiligen Beobachter positive Geschwindigkeiten sehen, also

$$v_{\mathrm{E,M}} = \frac{v_{\mathrm{E,R}} + v_{\mathrm{R,M}}}{1 + \frac{v_{\mathrm{E,R}} v_{\mathrm{R,M}}}{c^2}} = \underline{\underline{\frac{10}{11}}}c.$$

b) Die Winkel im Minkowski-Diagramm ergeben sich zu

$$\alpha_M = \arctan\left(\frac{v_{\mathrm{M}}}{c}\right) \approx 26.6° \text{ und } \alpha_E = \arctan\left(\frac{v_{\mathrm{E}}}{c}\right) \approx 36.9°.$$

Da $v$ für den Meteor positiv und für die Erde negativ ist, bewegen sich die Achsen auf die Winkelhalbierende zu, bzw. von ihr weg.