Ferienkurs Experimentalphysik 1
2012

Übung 1-Musterlösung

1. Auto gegen Baum

$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) = 2gh$
$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(100\frac{km}{h})^2}{3.6^2 \cdot 2 \cdot 9.81\frac{m}{s^2}} \approx 39.3m$

2. Sprungschanze

a) Die maximale Hohe nach Verlassen der Sprungschanze kann über die Energieerhaltung berechnet werden, der Bezugspunkt sei im Ursprung am Absprungpunkt. Am Umkehrpunkt, dem Punkt der maximalen Hohe während des Fluges hat die Geschwindigkeit der Springerin keine z-Komponente. Daher gilt für die maximale Höhe h_{max}:

$$E_{Umkehrpunkt} = E_{Absprungpunkt}$$
$$mgh_{max} + \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}mv_{Abspr}^2 = \frac{1}{2}m(v_{x,Abspr}^2 + v_{z,Abspr}^2$$

Laut Angabe, schließt die Geschwindigkeit der Springerin im Zeitpunkt des Absprungs einen Winkel von $\alpha = 25°$ mit der Horizontalen ein. Damit gilt für die maximale Hohe:

$$h_{max} = \frac{1}{2g}v_{z,Abspr}^2 = \frac{1}{2g}sin^2\alpha \cdot v_{Abspr}^2$$

Der Betrag der Geschwindigkeit am Absprungpunkt lasst sich auch aus der Energieerhaltung berechnen:

$$E_{start} = E_{pot,start} + E_{kin,start} = mgh_{start}$$

Diese Energie wird durch die Erdbeschleunigung bis zum Absprungpunkt vollständig in kinetische Energie umgewandelt:

$$E_{Abspr} = E_{pot,Abspr} + E_{kin,Abspr} = \frac{1}{2}mv_{Abspr}^2 = E_{Start}$$

Daraus kann man schließlich die maximale Höhe berechnen:

$$\frac{1}{2}v_{Abspr} = \frac{1}{m}E_{start} = gh_{start}$$

und damit:

$$h_{max} = \frac{1}{g}sin^2\alpha \cdot gh_{start} = sin^2\alpha h_{start} = 3,57m$$

b) Um die Weite zu berechnen verwendet man, dass man die beiden, senkrecht zueinander stehenden, Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_z getrennt be- handeln kann. Die Weite ist also:

$$s = v_x \cdot t = v \cdot cos\alpha \cdot t$$

Man benötigt also die Flugdauer T. Diese ist die Zeit, die die Springerin benötigt um vom Absprungpunkt wieder bei z = 0 zu landen. Die z-Komponenten Abhängigkeit von der Zeit kann man durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit der Bewegungsgleichung fur die z-Richtung berechnen:

$$m\ddot{z} = -mg$$

Da die Gravitationskraft unabhangig von der Zeit ist, sind die beiden Integrale leicht zu berechnen und es ergibt sich mit $v_z(0) = v_{0;z}$ und $z(0) = 0$:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0;z}t = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha t$$

Die Flugdauer t ist also:

$$z(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_{0;z}t = 0$$
$$t = \tfrac{2v_{0;z}}{g} = \tfrac{2v_0 sin\alpha}{g}$$

Damit beträgt die Weite s:

$$s = cos\alpha \cdot sin\alpha \cdot \frac{2v^2}{g} = 4cos\alpha \cdot sin\alpha h_{start} = 30.64m$$

c) Da in den obigen Teilaufgaben die Masse keine Rolle spielt, fliegt er genauso hoch.

3. Satellit

$$F_z = F_G$$
$$mr\omega^2 = G\frac{Mm}{r^2}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kgs^2} \cdot 5.977 \cdot 10^{24}kg}{(2\pi/(24 \cdot 3600s))^2}}$$
$$\approx 42252km$$

Für die beim start benötigte Energie gilt:

$$\Delta E = E_{pot,Orbit} - E_{pot,Erde} + E_{kin,Orbit} - E_{kin,Erde}$$
$$= \int_{R_E}^{R_0} F_G dr + \frac{1}{2}m(v_0^2 - v_E^2)$$
$$= \int_{R_E}^{R_0} G\frac{Mm}{r^2}dr + \frac{1}{2}m\omega^2(R_0^2 - R_E^2)$$
$$= GMm\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_0}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(R_0^2 - R_E^2)$$
$$= GMm\left(\frac{R_0 - R_E}{R_0 R_E}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(R_0^2 - R_E^2)$$

Für die neue Winkelgeschwindigkeit gilt:$\omega = \omega_0 \pm \omega_a$ mit ω_0 der Geschwindigkeit für die exakte Position und ω_A der Geschwindigkeit der Abweichung. Für die Geschwindigkeit der Abweichung gilt Näherungsweise $\omega_A = \frac{v_a}{r} \approx \frac{v_a}{R_0} = 100\frac{m}{Tag}/R_0$. Mit obiger Gleichung gilt:

$$r_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{GM}{(\omega_0 \pm v_a/R_0)^2}}$$

$$r_0 = 4.22518506 \cdot 10^7 m$$
$$r_1 = 4.22518400 \cdot 10^7 m$$
$$r_2 = 4.22518612 \cdot 10^7 m$$
$$r_0 - r_1 \approx 10.6m$$
$$r_2 - r_1 \approx 10.6m$$

4. Autorennen (alte Klausur Uni-Freiburg)

Das Auto fährt mit der Geschwindigkeit v dann auf einer Kreisbahn, wenn eine Zentripetalkraft $F = \frac{mv^2}{r}$ nach innen wirkt. Diese Kraft muss von der Reibungskraft aufgebracht werden, die maximal den Wert $F_R = \mu_0 mg$ haben kann. Die Kreisbahn ist möglich solange $F \leq F_R$ gilt.

a) Wenn beide Kräfte gleich sind, wird die Maximalgeschwindigkeit erreicht. Somit folgt $v_m = \sqrt{\mu_0 gr}$

b) Nach der Gleichung wird $\frac{1}{2}v_m$ erreicht für $\mu = \frac{1}{4}\mu_0$. Einsetzen liefert $t_{\frac{1}{2}} = \tau ln4$.

5. Planetenbewegung

a) Es gilt die Gleichheit von Zentripetalkraft F_Z und Gravitationskraft F_G

$$F_Z = M_E \frac{v_E^2}{r_E} = G \frac{m_E m_S}{r_{SE}^2} = F_G$$

also

$$v_E^2 = G \frac{m_S}{r_{SE}}$$

Nach genau einem Jahr (Umlaufzeit $t_E = 3.156 \cdot 10^7 s$) hat die Erde die Strecke $2\pi r_{SE}$ zurückgelegt, also gilt:

$$v_E^2 = \left(\frac{2\pi r_{SE}}{t_E} \right)^2$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Geschwindigkeit liefert:

$$\begin{aligned} G \tfrac{m_S}{r_{SE}} &= \left(\tfrac{2\pi r_{SE}}{t_E} \right)^2 \\ \rightarrow M_S &= \tfrac{4\pi^2 r_{SE}^3}{G t_E^2} = 2.1 \cdot 10^{30} Kg \end{aligned}$$

b) Auf der Erdoberfläche gilt:

$$G \frac{m_E}{R_E^2} = g = 9.81 m/s^2$$

also

$$m_E = \frac{f R_E^2}{G} = 5.97 \cdot 10^{24} kg$$

c) Es gilt wieder Gleichheit von Zentripetalkraft und Gravitationskraft, diesmal allerdings für den Jupiter auf seiner Umlaufbahn:

$$G \frac{m_S}{r_{SJ}} = v_J^2 = \left(\frac{2\pi r_{SJ}}{t_J} \right)^2$$

Wir lösen nach r_{SJ} auf

$$r_{SJ} = \left(\frac{G m_S t_J^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Mit dem Ergebnis aus a) und $t_J = 11.86 \cdot T_E$ ergibt sich:

$$r_{SJ} = 770 \cdot 10^6 km$$

6. Gravitation

a) Das Gravitationspotential der Erde ist gegeneb durch:

$$E_{Pot} = -\frac{GM_E m}{r}$$

Um dies in den Größen g un R_E auszudrücken, muss man sich überlegen, woher die Erdbeschleunigung g kommt. In der Nähe der Erdoberfläche fasst man die Gravitationskraft mit $F_G = -mg$ zusammen.

$$f_G = -\tfrac{d}{dr} E_{pot}(r) = -\tfrac{GM_E m}{r^2} = -mg$$
$$\rightarrow g = \tfrac{GM_E}{R_E^2}$$

Das Gravitationspotential einer Masse in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt ist damit:

$$E_{pot} = -\frac{gR_E^2 m}{r}$$

Die Bedingung für eine stabile Kreisbahn ist, dass die Gravitationskraft die Zentripetalkraft aufbringen muss, die beiden Kräfte also gleich groß sein müssen:

$$\tfrac{GM_E m}{r^2} = \tfrac{mv^2}{r}$$
$$\rightarrow v^2 = \tfrac{GM_E}{r}$$

Die kinetische Energie auf einer stabilen Kreisbahn beträgt dann:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{GM_E m}{r} = -\frac{1}{2}E_{pot}$$

b) Die Fluchtgeschwindigkeit ist dann erreicht, wenn die kinetische Energie größer ist, als die potentielle Energie.

$$E_{pot} + E_{kin} > 0$$

1) Der Mond befindet sich auf einer stabilen Kreisbahn, seine Geschwindigkeit beträgt, wie in a) berechnet:

$$v^2 > \frac{GM_E}{r}$$

Seine kinetische Energie entspricht dann der halben potentiellen Energie. Um die Bedingung für die Flucht zu erfüllen, muss sie verdoppelt werden. Die Geschwindigkeit des Mondes müsste um den Faktor $\sqrt{2}$ größer werden.

2) Um aus dem Gravitationsfeld des Mondes herauszukommen, muss wieder die Fluchtbedingung erfüllt sein. Die Fluchtgeschwindigkeit beträgt also:

$$v > \sqrt{\frac{2GM_M}{r_M}} = 2.38 km/s$$

7. Scheinkraft

Corioliskraft:$\vec{F}_C = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$ bzw. Betragsmäßig $F_C = 2m\omega v_\perp$, wobei $v_\perp$ die Bewegung senkrecht zur Rotationsachse bezeichnet. Für eine radiale Bewegung bei $\theta = 49°$ nördl. Breite ist

$$v_\perp = cos(\theta)v$$

Es zeige die z-Achse radial nach außen, die x-Achse zeige in Richtung der Ablenkung (nach Osten). Für eine radiale Bewegung in z-Richtung gilt dann:

$$\begin{gathered} \ddot{z} = -g \\ \rightarrow v_z(t) = -gt \\ z(t) = h - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{gathered}$$

Aus $z(t_0) = 0$ folgt eine Fallzeit von $t_0 = \sqrt{2h/g}$.
Für die Bewegung in x-Richtung gilt:

$$\begin{gathered} m\ddot{x} = F_C = 2\omega m cos(\theta) v_z \\ \rightarrow \ddot{x} = 2\omega cos(\theta) gt \\ \rightarrow x(t) = \tfrac{1}{3}\omega cos(\theta) gt^3 \end{gathered}$$

Für die Ablenkung $L = x(t_0)$ gilt dann:

$$\begin{gathered} L = \tfrac{1}{3}\omega cos(\theta) g \left(\sqrt[1]{\tfrac{2h}{g}} \right)^3 \\ = \tfrac{2}{3}\omega cos(\theta) h \sqrt[1]{\tfrac{2h}{g}} \end{gathered}$$

Mit $\omega = 2\pi/(24h)$,$\theta = 49°$ und $h = 110m$ erhält man:

$$L \approx 16.6mm$$

Bemerkung: Die Kugel erfährt außerdem eine Ablenkung durch die Zentrifugalkraft (Richtung Süden). Diese beträgt:

$$\begin{gathered} y(t_0) \approx -sin(\theta) R_E cos(\theta) \omega^2 \tfrac{t_0^2}{2} \\ \approx -187mm \end{gathered}$$

und ist somit (bei 49°)wesentlich größer als die Ablenkung durch die Corioliskraft.

8. Käfer

Sicht des Käfers:

$$\begin{gathered} F_Z = m\omega^2 r \hat{e}_r \\ F_C = -2mv_0\omega \hat{e}_\Phi \end{gathered}$$

Von außen sieht die Situation anders aus. Der Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Käfers sind gegeben als:

$$\vec{r}(t) = v_0 \cdot t \cdot \begin{pmatrix} cos\omega t \\ sin\omega t \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}(t) = \tfrac{d}{dt}\vec{r}(t) = v_0 \cdot \begin{pmatrix} cos\omega t \\ sin\omega t \end{pmatrix} + v_0 \cdot \omega t \cdot \begin{pmatrix} -sin\omega t \\ cos\omega t \end{pmatrix}$$
$$\vec{a}(t) = \tfrac{d}{dt}\vec{v}(t) = 2v_0\omega \begin{pmatrix} -sin\omega t \\ cos\omega t \end{pmatrix} - v_0\omega^2 t \begin{pmatrix} cos\omega t \\ sin\omega t \end{pmatrix}$$
$$= 2V_0\omega\hat{e}_\Phi - r\omega^2\hat{e}_r$$

Die Kraft ergibt sich dann als $\vec{F} = m\vec{a}$.

9. Cocktail (alte Klausur Uni-Freiburg)

a) Potentielle Energie: $U(x) = mgy = mgax^2$
b) Kraft: $F = -\frac{dU}{dx} = -2mgax$, Differentialgleichung: $\ddot{x} + 2gax = 0$
c) Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \sqrt{2ga}$
d) $x(t) = Acos(\omega t + \Phi)$
e) Koordinatentransformation: $x' = x + wt$, $\dot{x'} = \dot{x} + u$,$\ddot{x'} = \ddot{x}$
Einsetzten in die Diffgl.:$\ddot{x'} + \omega^2 x' = \omega^2 ut$
spez. Lösung (für $\ddot{x'} = 0$):$x'_s = ut$
Allgemeine Lösung: $x'(t) = Acos(\omega t + \Phi) + ut$

.Tunnel durch den Erdmittelpunkt **10l (alte Klausur Uni-Freiburg)**

a) Für die Berechnung der Gravitationskraft im Abstand r ist nur die Erdmasse relevant, die innerhalb der Kugel mit Radius r liegt.

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 = M_E\frac{r^3}{R_E^3}$$

Damit erhält man für die Gravitationskraft

$$F(r) = G\frac{mM(r)}{r^2} = GmM_E\frac{r}{R_E^3} = ng\frac{r}{R_E} = F(R_E)\frac{r}{R_E}$$

b) Mit dem 2. Newtonschen Gesetz erhalten wir:

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM_E}{R_E^3}r$$

Hieraus lesen wir ab

$$\omega^2 = \frac{GM_E}{R_E^3}$$

c) Schwingungsdauer: $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{R_E^3/(GM_E)} = 2\pi\sqrt{R_E/g}$