Ferienkurs Analysis 3 für Physiker

Fourierreihen und -integrale,
Distributionen
Stand: 16. März 2012

Übungsblatt WS11/12

1. Fourierreihe der periodischen Treppenfunktion

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 0, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Berechne die Komponenten $\widehat{f}_n$ der Fourierreihe und schreibe die Fourierreihe explizit auf.

Hinweis: Das Ergebnis lautet $Sf(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$.

Lösung:

Es gilt

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ e^{-inx} f(x)$$

Unter Verwendung der Definition von f erhält man

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}_n &= \int_{-\pi}^{0} dx\ e^{-inx} \cdot (-1) + \int_{0}^{\pi} dx\ e^{-inx} \cdot 1 \\ &\overset{*}{=} -\int_{0}^{\pi} dx\ e^{inx} + \int_{0}^{\pi} dx\ e^{-inx} \\ &= -2i\int_{0}^{\pi} dx\ \sin(nx) \\ &= \frac{2i}{n}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2i}{n}\left(\cos(nx) - 1\right) \end{aligned}$$

Beim mit $*$ gekennzeichneten Schritt wurde substituiert ($x \to -x$) und die Integralgrenzen vertauscht. Damit erhält man

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{in\pi}\left(1 - \cos(nx)\right) = \begin{cases} \frac{2}{in\pi} & k \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ 0 & k \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

Die Fourierreihe ergibt sich demnach zu

$$
\begin{aligned}
Sf(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{m\in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{im} e^{imx} \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{m\in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{im} \left[cos(mx) + i\sin(mx)\right]
\end{aligned}
$$

Da der Cosinus Inversionssymmetrisch ist $\cos(x) = \cos(-x)$ verschwindet er in der Summe.

$$
\begin{aligned}
Sf(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{m\in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{m} \sin(mx) \\
&\overset{*}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

Bei $*$ wurde ausgenutzt, dass $\frac{\sin(mx)}{m} = \frac{\sin(-mx)}{-m}$

2. Fourrierreihe der periodischen Sägezahnfunktion

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$. Berechne die Fourierkoeffizienzten f_n, gebe die Fourierreihe explizit an und diskutiere die Konvergenz der Reihe.

Hinweis: Das Ergebnis lautet $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$

Lösung:

Für $n = 0$ ergibt sich für $f_0 = \frac{\pi}{2}$. Für $n \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ |x| e^{-inx} &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} dx\ (-x)e^{-inx} + \int_0^{\pi} dx\ xe^{-inx}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} dx\ xe^{inx} + \int_0^{\pi} dx\ xe^{-inx}\right) \\
&= \frac{2}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} dx\ x\cos nx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\underbrace{[x\sin nx]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} dx\ \ \sin nx\right) \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right]
\end{aligned}
$$

Insgesamt also

$$
f_n = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2}, & k \in 2\mathbb{Z}+1 \setminus \{0\} \\ \frac{\pi}{2}, & k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
$$

Ähnlich zu den Symmetrieüberlegungen aus der vorangegangen Aufgabe ergibt sich

$$Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

Der Faktor 2 ergibt sich aus der Linearkombination des Kosinus $\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$

Die Reihe lässt sich aufgrund $\cos x \leq 1$ durch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ majoriesieren und konvergiert daher für alle x.

3. Fouriertransformation

Berechne die Fouriertransfomierte von

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

(Ergebnis: $\widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$)

Lösung: Lösung über den Residuensatz $\rightarrow f$ aufgefasst also komplexe Funktion:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikz} \frac{1}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{-R} dt\, \frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b dt\, \frac{e^{-ikRe^{it}}}{R^2 e^{i2t}+1}\, iRe^{it} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} \widehat{f}
\end{aligned}$$

Wir haben künstlich die Integration auf einen Kreisbogen erweitert, um den Residuensatz anzuwenden. Dabei gilt für den Kreisbogen folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_a^b dt\, \frac{e^{-ikRe^{it}}}{R^2 e^{i2t}+1}\, iRe^{-it} &= \int_a^b dt\, \frac{e^{-ikR(\cos t + i\sin t)}}{R^2 e^{i2t}+1}\, iRe^{it} \\
&= \int_a^b dt\, \frac{e^{-ikR\cos t}\, e^{kR\sin t}}{R^2 e^{i2t}+1}\, iRe^{it} \\
|\cdot| &\leq |a-b| \max_{t\in[a,b]} \left| \frac{Re^{kR\sin t}}{R^2 e^{i2t}+1} \right|
\end{aligned}$$

Damit das Integral über den Kreisbogen verschwindet, muss man den Weg für

- $k < 0$ oben schließen, damit $\sin t \geq 0, t \in [a = 0, b = \pi]$)

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_i \widehat{f} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^{-ikz}}{\frac{d}{dz}(z^2+1)}\bigg|_{z=i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^{-i^2 k}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^k}{2i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^k
\end{aligned}$$

- $k \geq 0$ unten schließen, damit $\sin t \leq 0, t \in [a = 0, b = -\pi])$ Vorsicht! Orientierung der Kurve im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) $\Rightarrow$ Residuum negativ zu werten.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \operatorname{Res}_{-i} \widehat{f} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^{-ikz}}{\frac{d}{dz}(z^2+1)}\bigg|_{z=-i} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} - 2\pi i \frac{e^{i^2 k}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \frac{e^{-k}}{2i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k}
\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

4. Lösen von Differentialgleichungen mittels Fourier-Transformation

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ derart, dass die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ ebenfalls integrierbar ist. Löse die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x_1} - 4u = f$$

auf $\mathbb{R}^2$, indem du u durch eine Fourier-(Rück)Trafo ausdrücken und diskutiere deren Existenz. Das Integral soll hier *nicht* ausgerechnet werden.

Lösung:

Sind u und seine Ableitungen integrierbar, können beide Seitden der Differentialgleichung Fourier-Transformiert werden

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x_1} - 4u\right) &= \left(i^2 k_1^2 \widehat{u} + 2i^2 k_2^2 \widehat{u} + 3ik_1 \widehat{u} - 4\widehat{u}\right) \\
&= \left(i^2 k_1^2 + 2i^2 k_2^2 + 3ik_1 - 4\right) \widehat{u} \\
&= \widehat{f}
\end{aligned}$$

Das Polynom $P(k) := -k_1^2 - 2k_2^2 + 3ik_1 - 4$ besitzt keine reellen Nullstellen, sodass $P(k)^{-1}$ wohldefiniert ist. Daher können wir nach $\widehat{u}$ auflösen und gleich die Fourier-Rücktransformation anwenden

$$u(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\frac{\widehat{f}}{P}\right)(x)$$

Da P im reellen beschränkt ist und nach Vorraussetzung $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ existiert das Fourierintegral.

5. Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm

Bestimme die Fouriertransformierte $\widehat{g}(k,t)$ von $g(k,t)$, sodass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Funktion

$$\phi(x,t) := \int_{\mathbb{R}} dy \; f(y) g(x-y,t)$$

das Anfangswertproblem $\phi(x,0) = f(x)$ zur Gleichung

$$\partial_t \phi(x,t) = \left(\partial_x^2 - m^2\right) \phi(x,t)$$

löst.

Lösung:

Das Integral aus der Angabe ist die Faltung $f * g$ von f und g in der Ortsvariable x. Für alle $f, g(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\phi(k,t) &:= \left(\mathcal{F}(g(\cdot,t) * f)\right)(k) = \left(\mathcal{F}(f * g(\cdot,t))\right)(k) && (1)\\
&= \sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}f)(k)\,(\mathcal{F}g)(k,t) && (2)\\
&= \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(k)\,\widehat{g}(k,t) && (3)
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung kann wieder durch Fourtransformation beider Seiten gelöst werden

$$\partial_t \widehat{\phi}(k,t) = -\left(k^2 + m^2\right) \widehat{\phi}(k,t)$$

Wir transformieren hier nur im Ortsraum x, so dass für die zeitliche Ableitung nicht der Satz der Algebraisierung der Ableitung verwendet werden kann. Die so erhaltene DGL kann durch einen Separationsansatz gelöst werden und besitzt folgende Lösung

$$(\mathcal{F}\phi)(k,t) = \widehat{\phi}(k,t) = \widehat{\phi}(k,0)\, e^{-\left(k^2+m^2\right) t} = \widehat{f}(k)\, e^{-\left(k^2+m^2\right) t}$$

Durch vergleich mit (3) ließt man ab, dass

$$\widehat{g}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(k^2+m^2\right)t}$$

sein muss.

6. Rechnen mit Distributionen

Betrachte die durch ein Integral definierte Distribtion

$$(K,\varphi) := \int_{\mathbb{R}} K(x)\varphi(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Hinweis: Etwas unsauber wird häufig – so wie hier – die Distribution mit dem Kern eines Integraloperators identifiziert.

Dabei soll

(a) $K(x) := \delta(x)$

(b) $K(x) := x^2$

sein. Berechne nun im distributiven Sinne

(i) die zweite Ableitung.

(ii) die Fouriertransformierte.

Lösung:

(a) (i) Nach Definition ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}(\partial_x \delta, \varphi) &= (-1)^1 (\delta, \partial_x \varphi) = -\partial_x \varphi(0) \\ \left(\partial_x^2 \delta, \varphi\right) &= (-1)^2 \left(\delta, \partial_x^2 \varphi\right) = +\partial_x^2 \varphi(0)\end{aligned}$$

(ii) Die Fouriertransformierte der Deltadistribution ergibt sich ebenfalls direkt aus der Definition

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\delta, \varphi) &\overset{\text{Def.}}{=} (\delta, \mathcal{F}\varphi) \overset{\text{Def. }\delta}{=} (\mathcal{F}\varphi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk\; e^{-i0k} \varphi(k) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dk\; (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \varphi(k) \\ &= \left((2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \varphi\right)\end{aligned}$$

Im distributiven Sinne kann also die Fourtransformierte der Deltadistribution $\mathcal{F}\delta$ mit der konstante $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$-Funktion identifiziert werden.

(b) (i) Die erste distributive Ableitung ergibts sich durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\left(\partial_x x^2, \varphi\right) &= -\left(x^2, \partial_x \varphi\right) = -\int_{\mathbb{R}} dx\; x^2 \partial_x \varphi(x) \\ &= \underbrace{-\left[x^2 \varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\to 0} + \int_{\mathbb{R}} dx\; \left(\partial x^2\right) \varphi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx\; 2x\, \varphi(x) \\ &= (2x, \varphi)\end{aligned}$$

Die Randterme verschwinden, da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und damit $\partial_x \varphi$ schneller als jede Potenz von x im Unendlichen gegen 0 abfällt. Die erste Ableitung im distributiven Sinne von x^2 ist also $2x$. Völlig analog berechnet sich die zweite Ableitung zu 2. Wir sehen also, die bei regulären Distributionen stimmt die distributive Ableitund mit der klassischen überein.

(ii) Da $x^2 \notin L^1(\mathbb{R})$ existiert die Fouriertransformierte im klassischen Sinne nicht. Dennoch kann man sie, aufgefasst als Distribution, berechnen. Nach Definition der distributiven Fouriertransformation ergibt sich

$$\left(\mathcal{F}x^2, \varphi\right) = \left(x^2, \mathcal{F}\varphi\right) = \int_{\mathbb{R}} dx\; x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dy\; e^{-ixy} \varphi(y)$$

Unter Verwendung von

$$x^2 e^{-ixy} = i^2 \partial_y^2 e^{-ixy}$$

erhält man – wieder unter vernachlässigung der Randterme – durch zweifache! partielle Integration

$$\begin{aligned} \ldots &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \\ &= (-1)^2 i^2 \int_{\mathbb{R}} dy \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dy \; e^{-ixy} \, 1 \right) \partial_x^2 \varphi(y) \end{aligned}$$

Aus der Teilaufgabe (a) ist die ersichtlich, was die Fouriertransformierte der konstanten 1-Funktion aufgefasst als Distribution ist.

$$\begin{aligned} &-\delta = \delta = \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(1) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}(1) = \sqrt{2\pi}\delta \end{aligned}$$

Eingesetzt liefert das

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{F}x^2, \varphi \right) = \ldots &= -\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy \; \delta(y) \partial_x^2 \varphi(y) \\ &= \left(-\sqrt{2\pi}\delta, \partial_x^2 \varphi \right) \\ &= \left(-\sqrt{2\pi} \partial_x^2 \delta, \varphi \right) \end{aligned}$$

Damit ließt man ab: $\mathcal{F}x^2 = -\sqrt{2\pi} \partial_k^2 \delta(k)$