Ferienkurs Analysis 3 für Physiker

Fourierreihen und -integrale,
Distributionen
Stand: 14. März 2012

Übungsblatt WS11/12

1. Fourierreihe der periodischen Treppenfunktion

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 0, & x = k\pi, k \in \mathcal{Z} \end{cases}$$

Berechne die Komponenten $\widehat{f_n}$ der Fourierreihe und schreibe die Fourierreihe explizit auf.

Hinweis: Das Ergebnis lautet $Sf(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$.

2. Fourrierreihe der periodischen Sägezahnfunktion

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$. Berechne die Fourierkoeffizienzten f_n, gebe die Fourierreihe explizit an und diskutiere die Konvergenz der Reihe.

Hinweis: Das Ergebnis lautet $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$

3. Fouriertransformation

Berechne die Fouriertransfomierte von

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

(Ergebnis: $\widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$)

4. Lösen von Differentialgleichungen mittels Fourier-Transformation

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ derart, dass die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ ebenfalls integrierbar ist. Löse die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x_1} - 4u = f$$

auf $\mathbb{R}^2$, indem du u durch eine Fourier-(Rück)Trafo ausdrücken und diskutiere deren Existenz. Das Integral soll hier *nicht* ausgerechnet werden.

5. Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm

Bestimme die Fouriertransformierte $\widehat{g}(k,t)$ von $g(k,t)$, sodass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Funktion

$$\phi(x,t) := \int_{\mathbb{R}} dy \; f(y) g(x-y,t)$$

das Anfangswertproblem $\phi(x,0) = f(x)$ zur Gleichung

$$\partial_t \phi(x,t) = \left(\partial_x^2 - m^2\right) \phi(x,t)$$

löst.

6. Rechnen mit Distributionen

Betrachte die durch ein Integral definierte Distribtion

$$(K,\varphi) := \int_{\mathbb{R}} K(x)\varphi(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Hinweis: Etwas unsauber wird häufig – so wie hier – die Distribution mit dem Kern eines Integraloperators identifiziert.

Dabei soll

(a) $K(x) := \delta(x)$

(b) $K(x) := x^2$

sein. Berechne nun im distributiven Sinne

(i) die zweite Ableitung.

(ii) die Fouriertransformierte.